MATEMÁTICA PREUNIVERSITARIA

CON APLICACIONES FÍSICAS

Tomo 2

BUCCINO - DANERI - DI BLASI - FASCE - VIVEROS

Matemática Preuniversitaria

con Aplicaciones Físicas

TOMO II

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

FACULTAD REGIONAL PACHECO

Decano

José Luis GARCÍA

Vicedecano

Ricardo H. CRIVICICH

Secretario Académico

Ricardo H. CRIVICICH

Secretario de Ciencia y Tecnología

Adrián Marcelo CANZIAN

Secretario Administrativo

Guillermo RICCI

Secretario de Asuntos Universitarios

Fernando LÓPEZ

Secretario de Extensión Universitaria

Julio Alfonso RODRÍGUEZ

Matemática Preuniversitaria

con Aplicaciones Físicas

TOMO II

Claudia Soraya Buccino

María Silvana Ramirez Daneri

Mario Alejandro Di Blasi Regner

Celia Beatriz Fasce

Pablo César Viveros Lincoman

Matemática preuniversitaria : con aplicaciones físicas / Claudia Soraya Buccino ... [et al.] ; editado por Claudia Soraya Buccino ; ilustrado por Claudia Soraya Buccino ; Pablo César Viveros. - 1a edición para el alumno - Hurlingham : Claudia Soraya Buccino, 2019.
220 p. : il. ; 30 x 21 cm.

ISBN 978-987-86-2574-4

1. Matemática. 2. Álgebra. 3. Funciones. I. Buccino, Claudia Soraya
CDD 510

Departamento de Ciencias Básicas

Director: Mario DI BLASI REGNER

Proyecto NEXOS – Área de Articulación

Director: Ricardo H. CRIVICICH

Coordinador general: Mario DI BLASI REGNER

Coordinada académica: Soraya BUCCINO

1ª edición: octubre de 2019

Ed. Claudia Soraya Buccino

ISBN: 978-987-86-2574-4

Se imprimió en octubre de 2019 en Zona Pacheco (Av. Constituyentes 770, Pacheco, Buenos Aires)

Prólogo

Este segundo tomo completa el trabajo que venimos realizando desde el año 2017 con docentes y alumnos de los últimos años de diversas escuelas secundarias, que articulan con la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco (UTN FRGP) y por ser profesores en los primeros años de la Universidad es que, conocemos y comprendemos la problemática de los estudiantes que se inician en la vida universitaria.
Esta obra es el resultado del trabajo realizado por docentes del Área de Articulación de la UTN FRGP y reúne los conocimientos básicos, en el área de Matemática, que consideramos imprescindibles para el acceso a la Universidad.
Al escribir cada capítulo hemos procurado utilizar un "lenguaje natural" e introducir a los alumnos gradualmente en el lenguaje propio de la Matemática, pero también, con la rigurosidad y formalización que esta materia exige en su aspecto conceptual.
En ningún momento intentamos ahorrar en explicaciones ni en el desarrollo de los conceptos, ya que priorizamos la comprensión en profundidad de los conceptos aquí desarrollados y esperamos que eso suceda.
Realizamos este libro con la convicción de que la aplicación de la Matemática, bien orientada, puede aportar grandes beneficios en su enseñanza y aprendizaje. En este sentido, tratamos los conceptos matemáticos integrados y aplicados a la Física, como así también al entorno cotidiano de los alumnos.
Es nuestro deseo, que este texto se convierta en una herramienta útil para nuestros alumnos y que, sumados a sus esfuerzos, haga posible un exitoso ingreso a la Universidad.

Los autores.

Índice

2. Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones lineales

3. Funciones

1. Expresiones algebraicas

1.1. Introducción

La necesidad que tuvieron los matemáticos, a lo largo de la historia, de incorporar símbolos en la matemática radica en que estos les permitieron expresar de una manera más simple sus ideas. Desde los babilonios (1700 a. de C) hasta Diofanto (250 a. de C.), las operaciones se relataban en lenguaje natural (período retórico o verbal). Así, por ejemplo, en el papiro de Rhind (1650 a. de C.) aparece el siguiente enunciado de un problema: "*un montón y un séptimo del mismo es igual a 24*". Con la palabra "un montón" designaban a la incógnita de la situación.
A partir de Diofanto y hasta comienzos del siglo XVI se comienzan a utilizar algunas abreviaturas (período abreviado o sincopado) y recién a partir del siglo XVI, con Descartes, se empieza a utilizar un lenguaje simbólico bastante parecido al actual (período simbólico).
El Álgebra es una rama de la matemática que justamente se caracteriza por el uso de letras y expresiones literales sobre las que podemos hacer operaciones. La posibilidad de representar con una sola letra infinitos valores y el hecho de poder operar con ellas de forma bastante sencilla es lo que la hace ser de gran utilidad, incluso para otras ciencias. Por ejemplo,

- *Para determinar la capacidad de una cisterna cilíndrica se emplea la expresión*
$$\pi r^2 h$$
- *Para calcular la fuerza gravitacional de dos cuerpos se utiliza la expresión determinada por Newton*

$$\frac{mMg}{d^2}$$

Estas dos expresiones dependen de los valores numéricos que pueden tomar las letras que aparecen en ellas. Si la cisterna tiene una altura de 5 metros y un radio de $1,5$ metros, su capacidad total (V) con $r = 1{,}5\, m\,;\ h = 5\, m$ es

$$V = \pi(1{,}5\, m)^2(5\, m) = \pi(2{,}25\, m^2)(5\, m) = \boxed{11{,}25\, \pi\, m^3}$$

Si tomamos una aproximación de $\pi \cong 3{,}14$ nos queda

$$V \cong 3{,}14 \cdot 11{,}25\, m^3 \cong \boxed{35{,}325\, m^3}$$

La importancia del Álgebra está en permitir que la Matemática se convierta en un lenguaje universal, buscando expresiones que simplifiquen diversos fenómenos.

1.2. Expresión algebraica

Se considera una *expresión algebraica* a toda *composición de números y letras vinculados mediante operaciones aritméticas.* Generalmente, se utilizan para describir matemáticamente diversas situaciones o para generalizar propiedades matemáticas.

En la siguiente tabla describimos algunos ejemplos:

	Lenguaje Coloquial	**Lenguaje Simbólico**
Si E representa mi edad actual	Dentro de 12 años tendré	$E + 12$
	El quíntuple de mi edad es	$5E$
Si un cuadrado es de lado l	El perímetro del cuadrado es	$4l$
	El área del cuadrado es	l^2
Si A y B son dos números reales	El cuadrado de su suma es	$(A + B)^2$
	La diferencia de sus cuadrados es	$A^2 - B^2$

Para obtener el *valor numérico* de una expresión algebraica, basta con asignar un número a cada una de las letras (variables) y resolver las operaciones indicadas.

- *Si mi edad actual es de 19 años, dentro de 10 años tendré*

$$E + 10 = (19) + 10 = 29 \text{ años}$$

- *Si el lado de un cuadrado mide* 7,8 *cm, entonces su área es*

$$l^2 = (7{,}8)^2 = 60{,}84\ cm^2$$

- *Si* $A = -3$ *y* $B = \frac{5}{2}$*, el cuadrado de su suma la podemos calcular con*

$$\left(-3 + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

En toda expresión algebraica podemos identificar:

- ***Término:*** *Es cada parte de una expresión separada por las operaciones de adición y sustracción (si no existen paréntesis que modifiquen la jerarquía de la operación). En otras palabras, son los sumandos.*

- ***Coeficiente:*** *Cada término puede estar compuesto por un factor numérico y otro literal. El factor numérico de un término se denomina coeficiente.*

- ***Términos semejantes:*** *Son aquellos términos de una expresión algebraica que presentan la misma parte literal. Es importante notar que los términos semejantes pueden sumarse o restarse.*

1.3. Polinomios

Es de mucha utilidad estudiar expresiones algebraicas del tipo

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 3$$

que se obtienen sumando potencias no negativas de x multiplicadas por un coeficiente. A este tipo de expresiones se las denomina **polinomios** en la variable x.

Podemos observar, en este caso, que la potencia más alta que toma la variable es 3, que indica el **grado del polinomio**. También notemos que el coeficiente de dicho término es 2, llamado **coeficiente principal**.

Un polinomio en una variable es toda expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

con $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ *y* $a_i \in \mathbb{R}$

- $P(x)$ *indica que el polinomio tiene como única variable a la representada por la letra* x.
- *La condición* $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ *indica que los exponentes que afectan a la variable tienen que ser números enteros positivos o cero.*
- n *es la potencia más alta a la que aparece elevada la variable. Por esta razón, se la denomina grado del polinomio.*
- a_i *hace referencia a los coeficientes de cada término. Bajo la condición* $a_i \in \mathbb{R}$ *se aclara que los coeficientes pueden ser cualquier número real.*
- a_n *se denomina coeficiente principal y a* a_0 *término independiente.*
- *El polinomio es completo cuando presenta todos los términos. Es decir, ninguno de sus coeficientes es cero.*
- *Si el polinomio tiene un único término se denomina monomio, si tiene dos (binomio), tres (trinomio) y cuatro (cuatrinomio).*

Ejemplo 1: *Dados los siguientes polinomios:*

$$P(x) = \sqrt{2}x^3 + x - 2\ , \qquad Q(x) = x^5 + 5x \quad y \quad R(x) = -x^2$$

Indicar grado, coeficiente principal y término independiente.

Podemos ubicar los polinomios y describir los elementos solicitados en la siguiente tabla:

Polinomio	**Grado**	**Coeficiente principal**	**Término independiente**
$P(x) = \sqrt{2}x^3 + x - 2$	$gr(P) = 3$	$\sqrt{2}$	-2
$Q(x) = x^5 + 5x$	$gr(Q) = 5$	1	0
$R(x) = -x^2$	$gr(R) = 2$	-1	0

¿Cuál será el polinomio nulo?
¿y el polinomio constante?

1.4. Adición de polinomios

Para sumar (o restar) dos polinomios, se procede a sumar (o restar) los términos semejantes, es decir, aquellos que presentan la misma potencia de x.

Ejemplo 2: *Dados los siguientes polinomios:*

$$P(x) = 20x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x + 9$$
$$Q(x) = -27x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 9$$
$$R(x) = 20x^4 - 4x^3 + 10x^2 + x - 3$$

Obtener,

(a)

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (20x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x + 9) + (-27x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 9) \\ &= 20x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x + 9 - 27x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 9 \\ &= (20x^4 - 27x^4) + (-3x^3 + 6x^3) + (-x^2 - 11x^2) + 8x + (9 - 9) \\ &= \boxed{\boldsymbol{-7x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 8x}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(x) - R(x) &= (20x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x + 9) - (20x^4 - 4x^3 + 10x^2 + x - 3) \\ &= 20x^4 - 3x^3 - x^2 + 8x + 9 - 17x^4 + 4x^3 - 10x^2 - x + 3 \\ &= (20x^4 - 20x^4) + (-3x^3 + 4x^3) + (-x^2 - 10x^2) + (8x - x) \\ &\quad + (9 + 3) \\ &= \boxed{\boldsymbol{x^3 - 11x^2 + 7x + 12}} \end{aligned}$$

Observemos, del ejemplo anterior, que el grado de la suma (o resta) de los dos polinomios puede ser menor o igual al máximo de los grados de estos dos. En el caso de la suma, obtuvimos un polinomio con el mismo grado y en la resta con un grado menor. Esto se debe a la siguiente propiedad:

> ***Propiedad:*** *Sean P y Q dos polinomios cualesquiera, en la misma variable, el grado de $(P + Q)$ es menor o igual al del polinomio de mayor grado. En forma simbólica*
>
> $$gr(P + Q) \leq \text{máx}\big(gr(P); gr(Q)\big)$$

¿Cuál será el polinomio neutro en la suma?
¿Un polinomio tiene inverso en la suma?

1.5. Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios podemos aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación para luego sumar los términos semejantes.

Ejemplo 3: *Dados los siguientes polinomios:*

$$\begin{aligned} P(x) &= 4x^4 - 5x + 2 \\ Q(x) &= x^3 + 7x - 1 \\ R(x) &= -x - 1 \end{aligned}$$

Obtener,

(a)

$$\begin{aligned} Q(x) \cdot R(x) &= (x^3 + 7x - 1) \cdot (-x - 1) \\ &= -x^4 - 7x^2 + x - x^3 - 7x + 1 \\ &= -x^4 - x^3 - 7x^2 + (x - 7x) + 1 \\ &= \boxed{\boldsymbol{-x^4 - x^3 - 7x^2 - 6x + 1}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(x)\cdot Q(x) &= (4x^4-5x+2)\cdot(x^3+7x-1)\\ &= 4x^4(x^3+7x-1)-5x(x^3+7x-1)+2(x^3+7x-1)\\ &= 4x^7+28x^5-4x^4-5x^4-35x^2+5x+2x^3+14x-2\\ &= \boxed{\mathbf{4x^7+28x^5-9x^4+2x^3-35x^2+19x-2}} \end{aligned}$$

Observamos que el grado del producto de dos polinomios es igual a la suma de los grados de estos. En el ítem (a) multiplicamos un polinomio de grado 3 y otro de grado 1 y obtuvimos un polinomio de grado 4. Mientras que en el ítem (b), multiplicamos polinomios de grado 4 y 3 respectivamente y obtuvimos un polinomio de grado 7.

> ***Propiedad:*** *Sean P y Q dos polinomios cualesquiera, en la misma variable, el grado de $(P\cdot Q)$ es igual a la suma de los grados de los factores. En forma simbólica*
>
> $$gr(P\cdot Q)=gr(P)+gr(Q)$$

¿Cuál será el polinomio neutro en la multiplicación?

1.6. Productos notables

Debido a que aparecen en numerosas ocasiones y en diferentes contextos, hay dos productos notables que estudiaremos en este apartado: *el cuadrado de un binomio y el producto de binomios conjugados.*

1.6.1. Cuadrado de un binomio

Comencemos con definir la potenciación de polinomios de la siguiente manera:

$$[P(x)]^n=\underbrace{P(x)\cdot P(x)\cdot\ldots\cdot P(x)}_{n\ factores}$$

Es decir, la potencia enésima de un polinomio es el resultado de multiplicarlo n veces por sí mismo. De más está decir que es la misma definición de la potenciación definida en el conjunto de los números reales.

Ahora, dado el siguiente cuadrado,

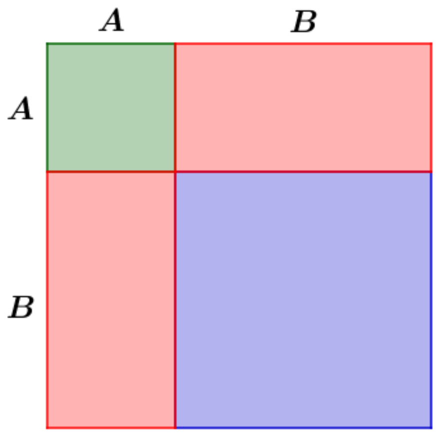


Figura 1

queda claro que para calcular el área total podemos hacer,

$$\text{Área } Total = base \cdot altura$$
$$\text{Área } Total = (A+B)(A+B)$$
$$\text{Área } Total = (A+B)^2 \ \ (1)$$

Sin embargo, podemos subdividir el cuadrado de la siguiente manera:

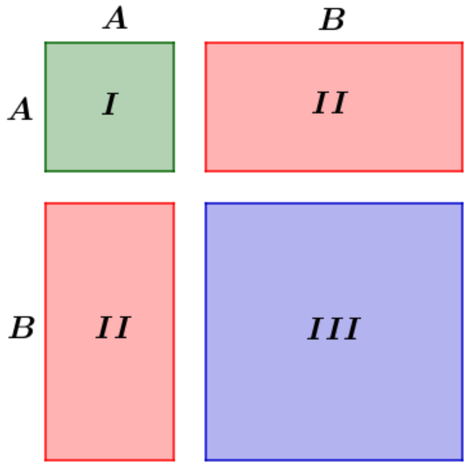


Figura 2

Las áreas de los cuadrados I y III son A^2 y B^2, respectivamente. Por otro lado, los rectángulos II tienen las mimas dimensiones y sus áreas se pueden calcular haciendo $A \cdot B$.

Entonces, el área total resulta

$$\text{Área } total = A^2 + 2AB + B^2 \ (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2) obtenemos nuestro primer producto notable, llamado *cuadrado de un binomio.*

$$\boxed{(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$$

Se lee: *"el cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término"*

Podemos verificar esta igualdad, aplicando por supuesto la propiedad distributiva:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

A la expresión que resulta de desarrollar el cuadrado de un binomio se la denomina *trinomio cuadrado perfecto.*

¿Cómo se modifica la igualdad si el cuadrado del binomio es $(\boldsymbol{A-B})^{\mathbf{2}}$?

Ejemplo 4: *Desarrollar los siguientes cuadrados sin aplicar propiedad distributiva:*

(a)

$$(-x-1)^2 = (-x)^2 + 2\cdot(-x)\cdot(-1) + (-1)^2 = \boxed{\boldsymbol{x^2+2x+1}}$$

(b)

$$\left(2x+\frac{1}{2}\right)^{\mathbf{2}} = (2x)^2 + 2\cdot(2x)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\boldsymbol{4x^2+2x+\frac{1}{4}}}$$

(c)

$$(2-3x^3)^{\mathbf{2}} = (2)^2 + 2\cdot(2)\cdot(-3x^3) + (-3x^3)^2 = \boxed{\boldsymbol{4-12x^3+9x^6}}$$

1.6.2. Producto de binomios conjugados

Se dice que dos binomios son conjugados cuando se diferencian entre ellos por el signo de uno de sus términos. Por ejemplo, los binomios

$$P(x) = 2x^3 - 5x \qquad y \qquad Q(x) = 2x^3 + 5x$$

son conjugados porque difieren solo en el signo del último término. Observemos que $-5x$ y $5x$ son opuestos.
Si realizamos el producto entre dos binomios conjugados obtenemos,

$$(A + B)(A - B) = A^2 + AB - AB - B^2$$
$$\boxed{(A + B)(A - B) = A^2 - B^2}$$

A la expresión que resulta de multiplicar dos productos conjugados se la denomina *diferencia de cuadrados.*

Ejemplo 5: *Resolver los siguientes productos sin aplicar propiedad distributiva:*

(a)

$$(x^2 - 10)(x^2 + 10) = (x^2)^2 - 10^2 = \boxed{\boldsymbol{x^4 - 100}}$$

(b)

$$(2x^3 - 5x)(2x^3 + 5x) = (2x^3)^2 - (5x)^2 = \boxed{\boldsymbol{4x^6 - 25x^2}}$$

1.7. Completamiento de cuadrados

Como hemos visto, el cuadrado de un binomio siempre se puede expresar como un trinomio de la forma,

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

Es importante aclarar que este trinomio se denomina *trinomio cuadrado perfecto*, porque tiene las siguientes propiedades:

- *El trinomio puede ser ordenado en potencias descendentes.*
- *Dos de los términos son cuadrados perfectos.*
- *El tercer término es el doble producto de las raíces cuadradas de los otros dos.*
- *Los dos términos que son cuadrados perfectos tienen el mismo signo.*

Veamos algunos ejemplos:

Trinomio	**Términos cuadrados perfecto**	**Verificación con el tercer término**	**Cuadrado de un binomio**	**¿Es Trinomio cuadrado perfecto?**
$x^2 + 6x + 9$	x^2 y 9	$6x = \mathbf{2} \cdot x \cdot 3$	$(x+3)^2$	Sí
$x^2 - 3x + 2$	x^2 y 2	$3x \neq \mathbf{2} \cdot x \cdot \sqrt{2}$	$-$	No
$4x^2 - 8x + 4$	$4x^2$ y 4	$8x = \mathbf{2} \cdot 2x \cdot 2$	$(2x-2)^2$	Sí
$x^4 + 2x^2 + 1$	x^4 y 1	$2x^2 = \mathbf{2} \cdot x^2 \cdot 1$	$(x^2+1)^2$	Sí
$x^2 + x + 1$	x^2 y 1	$x \neq \mathbf{2} \cdot x \cdot 1$	$-$	No
$\frac{1}{9}x^4 + \frac{10}{3}x^2 + 25$	$\frac{1}{9}x^4$ y 25	$\frac{10}{3}x^2 = \mathbf{2} \cdot \frac{1}{3}x^2 \cdot 5$	$\left(\frac{1}{3}x^2 + 5\right)^2$	Sí

Observemos que los trinomios que no son cuadrados perfectos no pueden escribirse como el cuadrado de un binomio. Sin embargo, existe un procedimiento denominado "*completamiento de cuadrados*" que consiste en construir mediante operaciones algebraicas y a partir de un trinomio cuadrado que no es perfecto, un binomio al cuadrado más (o menos) una constante.
Para comprender este procedimiento, tomemos un trinomio de la tabla anterior,

$$x^2 + x + 1$$

Sabemos que no es trinomio cuadrado perfecto ya que,

$$x \neq \mathbf{2} \cdot x \cdot 1$$

Sin embargo, podemos descomponer el coeficiente del tercer término de la siguiente manera,

$$x^2 + x + 1 = x^2 + \mathbf{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x + 1$$

Busquemos ahora cuál es el término que debemos introducir en la expresión para que resulte un trinomio cuadrado perfecto. Dicho número es

$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ pero para que la expresión siga siendo equivalente a la dada, debemos sumar y restar dicho número:

$$x^2 + \mathbf{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} - \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + 1$$

Los primeros tres términos ahora sí son trinomios cuadrados perfectos:

$$\left[x^2 + \mathbf{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}\right] - \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + 1$$

Nos queda entonces,

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$$

Finalmente

$$x^2 + x + 1 = \boxed{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Y así logramos expresar un trinomio que no es cuadrado perfecto, como el cuadrado de un binomio más (en este caso) un término. Este procedimiento será de suma utilidad en próximos capítulos.

Ejemplo 6: *Completar cuadrados en los siguientes trinomios:*

(a)

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1 &= x^2 + \mathbf{2} \cdot 2 \cdot x + 1 = x^2 + \mathbf{2} \cdot 2 \cdot x + \mathbf{2^2} - \mathbf{2^2} + 1 \\ &= [x^2 + \mathbf{2} \cdot 2 \cdot x + \mathbf{2^2}] - \mathbf{2^2} + 1 = (x+2)^2 - 4 + 1 \\ &= \boxed{(\boldsymbol{x} + \mathbf{2})^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x^4 - 10x^2 - 9 &= x^4 - \mathbf{2} \cdot 5 \cdot x^2 - 9 = x^4 - \mathbf{2} \cdot 5 \cdot x^2 + \mathbf{5^2} - \mathbf{5^2} - 9 \\ &= [x^4 - \mathbf{2} \cdot 5 \cdot x^2 + \mathbf{5^2}] - \mathbf{5^2} - 9 = (x^2 - 5)^2 - 25 - 9 \\ &= \boxed{(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{5})^{\mathbf{2}} - \mathbf{34}} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 3x^2 + 24x + 30 &= 3 \cdot (x^2 + 8x + 10) = 3 \cdot (x^2 + \mathbf{2} \cdot 4 \cdot x + 10) \\ &= 3 \cdot (x^2 + \mathbf{2} \cdot 4 \cdot x + \mathbf{4^2} - \mathbf{4^2} + 10) = 3 \cdot (x+4)^2 + 3 \cdot (-6) \\ &= \boxed{\mathbf{3}(\boldsymbol{x} + \mathbf{4})^{\mathbf{2}} - \mathbf{18}} \end{aligned}$$

1.8. División de polinomios

1.8.1. Divisibilidad de polinomios

Con los polinomios también podemos estudiar cuestiones relacionadas a la divisibilidad o factorización, en completa analogía con la aritmética de los números enteros.
El polinomio $(x-1)$ divide en forma exacta a (x^3-1) ya que este último admite la factorización,

$$x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

Y el polinomio $(x-2)$ divide en forma exacta a (x^2-4) ya que admite la factorización,

$$x^2-4=(x-2)\cdot(x+2)$$

En general, sean P y Q polinomios (Q no nulo), diremos que Q divide en forma exacta a P, si existe un polinomio C tal que,

$$P=Q\cdot C$$

Cuando no es posible factorizar a un polinomio, es decir, no es posible encontrar un polinomio C (no constante) decimos que este es **irreducible.** Todos los polinomios lineales son ejemplo de polinomios irreducibles.

1.8.2. Algoritmo de la división de polinomios

Aunque Q no divida en forma exacta a P, podríamos preguntarnos si es posible escribirlo de la forma,

$$P=Q\cdot C+R$$

Es decir, como la división de polinomios es análoga a la división entera entre números, si queremos el cociente entre los polinomios P y Q (donde el grado de P es mayor al de Q) hay que determinar otros dos polinomios C (cociente) y R(resto).
Para encontrar C y R se procede utilizando el mismo algoritmo de división que ya conocemos para los números.

Ejemplo 7: *Dados los siguientes polinomios:*

$$P(x) = 3x^5 + 2x^4 - 5x^2 + 2$$
$$Q(x) = 1 + x^2 - 2x$$
$$R(x) = 2x + 6$$

Obtener,

(a) $Q(x){:}\,R(x) =$

Primero conviene ordenar y completar los polinomios antes de aplicar el algoritmo de la división. Luego buscaremos uno a uno los términos del cociente,

$$\begin{array}{r|l}
x^2 - 2x + 1 & 2x + 6 \\ \cline{2-2}
\underline{-\;x^2 - 3x\quad} & \mathbf{\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}} \\
-5x + 1 & \\
\underline{\quad 5x + 15} & \\
\mathbf{16} &
\end{array}$$

C.A:

$$\frac{1}{2}x \cdot (2x + 6) = x^2 + 3x$$
$$-\frac{5}{2} \cdot (2x + 6) = -5x - 15$$

$\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)$ **es el cociente de la división y 16 es el resto de la misma.**

Es decir,

$$x^2 - 2x + 1 = (2x + 6) \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right) + 16$$

(b) $P(x){:}\,Q(x) =$

$$\begin{array}{r|l}
3x^5 + 2x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 0x + 2 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^5 + 6x^4 - 3x^3} \qquad\qquad\qquad & \mathbf{3x^3 + 8x^2 + 13x + 13} \\
8x^4 - 3x^3 - 5x^2 \qquad\qquad & \\
\underline{-8x^4 + 16x^3 - 8x^2} \qquad\qquad & \\
13x^3 - 13x^2 + 0x \quad & \\
\underline{-13x^3 + 26x^2 - 13x} \quad & \\
13x^2 - 13x + 2 & \\
\underline{-13x^2 + 26x - 13} & \\
\mathbf{13x - 11} &
\end{array}$$

$(\mathbf{3x^3 + 8x^2 + 13x + 13})$ **es el cociente de la división y** $(\mathbf{13x - 11})$ **es el resto de la misma.**

Es decir,

$$3x^5 + 2x^4 - 5x^2 + 2 = (x^2 - 2x + 1) \cdot (3x^3 + 8x^2 + 13x + 13) + (13x - 11)$$

1.8.3. Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un método práctico que se utiliza para dividir un polinomio por un binomio de la forma $(x-k)$ donde k es una constante. Pasemos a describirlo en forma generalizada:
Tenemos al polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y lo queremos dividir por el binomio $(x-k)$. Para comenzar la regla de Ruffini, realizamos la siguiente distribución de los coeficientes:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ & & & & & \\ k & & & & & \\ \hline & a_n & & & & \end{array}$$

Observemos que solo utilizamos los coeficientes de los polinomios. En la línea inferior se ubican los correspondientes al resultado, que será un polinomio de grado $n-1$, y el factor r que corresponde al resto de la división.

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ & & & & & \\ k & & & & & \\ \hline & a_n = b_{n-1} & & & & \end{array}$$

El primer paso consiste en realizar el producto $k \cdot b_{n-1}$ y colocarlo debajo de a_{n-1}.

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ k & & kb_{n-1} & & & \\ \hline & a_n = b_{n-1} & & & & \end{array}$$

El resultado de la suma entre los dos coeficientes, de la misma columna, se coloca debajo de la línea horizontal.

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ k & & kb_{n-1} & & & \\ \hline & a_n = b_{n-1} & a_{n-1} + kb_{n-1} = b_{n-2} & & & \end{array}$$

Este procedimiento se repite hasta terminar con todas las columnas.

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ k & & kb_{n-1} & \dots & kb_1 & kb_0 \\ \hline & a_n & a_{n-1}+kb_{n-1} & \dots & a_1+kb_1 & a_0+kb_o \\ & =b_{n-1} & =b_{n-2} & \dots & =b_0 & r \end{array}$$

El resultado de la división entre $P(x)$ y $(x-k)$ es:

$$b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0$$

con resto igual a r.

Ejemplo 8: *Resolver aplicando Ruffini*

(a) $(x^3 - 8x + 5):(x-3)$
Primero, tenemos que completar el polinomio de tercer grado:

$$x^3 - 8x + 5 \implies \boxed{x^3 + 0x^2 - 8x + 5}$$

A continuación, presentamos los pasos de la regla de Ruffini para esta división,
Paso 1:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -8 & 5 \\ 3 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Paso 2:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -8 & 5 \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & 3 & & \end{array}$$

Paso 3:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -8 & 5 \\ 3 & & 3 & 9 & \\ \hline & 1 & 3 & 1 & \end{array}$$

Paso 4:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -8 & 5 \\ 3 & & 3 & 9 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 8 \end{array}$$

Por lo tanto, el cociente es $(\boldsymbol{x^2 + 3x + 1})$, con resto igual a $\mathbf{8}$. Recordemos que la relación entre todos estos tres polinomios y el resto es,

$$x^3 - 8x + 5 = (x^2 + 3x + 1)(x - 3) + 8$$

(b) $(2x^3 - 5x + 5x^2 - 14){:}\,(x + 2)$

La regla de Ruffini completa para esta división es:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & -5 & -14 \\ -2 & & -4 & -2 & 14 \\ \hline & 2 & 1 & -7 & 0 \end{array}$$

Obtenemos como resultado $(\boldsymbol{2x^2 + x - 7})$ y en este caso con resto 0. Es decir,

$$2x^3 - 5x + 5x^2 - 14 = (2x^2 + x - 7) \cdot (x + 2)$$

En esta última operación llegamos a un resultado que será muy importante en el apartado siguiente. Recordemos que cuando el **resto del cociente** entre dos números es **cero** decimos que la **división es exacta**.

1.8.4. Teorema del resto

> ***Teorema del resto:*** *Al dividir un polinomio $P(x)$ por un binomio $(x-\boldsymbol{k})$, el resto es igual a $P(\boldsymbol{k})$.*

En el ítem (a) del ejemplo 8, obtuvimos que la división

$$(x^3-8x+5):(x-\mathbf{3})$$

tiene como cociente al polinomio (x^2+3x+1) y como resto 8. Podemos verificar que el teorema del resto se cumple, calculado el valor numérico de (x^3-8x+5) para $x=3$:

$$\mathbf{3}^3-8(\mathbf{3})+5=27-24+5=\boxed{8}$$

También en el ítem b) llegamos a que la división,

$$(2x^3-5x+5x^2-14):(x+2)$$

tiene como cociente al polinomio $(2x^2+x-7)$ y resto 0. Por lo tanto, podemos afirmar y verificar que el valor numérico del polinomio $(2x^3-5x+5x^2-14)$ al evaluarlo en $x=-2$ es cero:

$$2(\mathbf{-2})^3-5(\mathbf{-2})+5(\mathbf{-2})^2-14=-16+10+20-14=\boxed{0}$$

> *Llamamos **ceros o raíces** de un polinomio $P(x)$ a los valores de x para los cuales $P(x)=0$.*

Teniendo en cuenta esta última definición y el teorema del resto, podemos encontrar todos los binomios de la forma $(x-k)$ que son divisores exactos de un polinomio, sabiendo cuáles son sus raíces o ceros. El problema que surge al realizar este tipo de búsqueda radica en encontrar todas las raíces del polinomio en cuestión. Cabe preguntarnos, ¿cuántas tendrá?, ¿cómo las encontramos?
Antes de pasar a analizar un método práctico para encontrar las raíces de un polinomio enunciemos uno de los teoremas más importante del Álgebra, que dará respuesta a nuestro primer interrogante:

> ***Teorema fundamental del Álgebra:*** *Un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, considerando las reales y las complejas.*

Aclaremos que los números complejos pertenecen a un conjunto numérico más amplio que el de los números reales. En nuestra búsqueda de raíces para poder encontrar divisores de un polinomio, solo nos interesan las pertenecientes al conjunto de los números reales.

Ejemplo 9: *Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que los siguientes polinomios cumplan con las condiciones indicadas:*

(a) Al dividir $\boldsymbol{Q(x) = 7k - 8kx - kx^2}$ por el binomio $\boldsymbol{(x+9)}$ se obtiene un resto de -7.

Por el *teorema del resto,* sabemos que al evaluar $Q(x)$ en $x = -9$ debemos obtener como resultado -7. Es decir,

$$Q(-9) = -7$$

Reemplazando en la expresión del polinomio, obtenemos,

$$\begin{aligned} Q(-9) &= -7 \\ 7k - 8k(\mathbf{-9}) - k(\mathbf{-9})^2 &= -7 \\ 7k + 72k - 81k &= -7 \end{aligned}$$

Resulta una ecuación sencilla donde la incógnita es k. Procedemos a encontrar su valor:

$$\begin{aligned} 7k + 72k - 81k &= -7 \\ -2k &= -7 \\ \boxed{\boldsymbol{k = \frac{7}{2}}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, reemplazando en $Q(x)$,

$$Q(x) = 7\left(\frac{7}{2}\right) - 8\left(\frac{7}{2}\right)x - \frac{7}{2}x^2 = \frac{49}{2} - 28x - \frac{7}{2}x^2$$

Podemos verificar que encontramos el polinomio correcto realizando la división de $Q(x)$ por $(x+9)$, por ejemplo, empleado la *regla de Ruffini.* Ordenamos el polinomio,

$$Q(x) = -\frac{7}{2}x^2 - 28x + \frac{49}{2}$$

y aplicamos la regla,

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & -\dfrac{7}{2} & -28 & \dfrac{49}{2} \\[2ex]
-9 & & \dfrac{63}{2} & -\dfrac{63}{2} \\
\hline
 & -\dfrac{7}{2} & \dfrac{7}{2} & \boxed{-7}
\end{array}
$$

Podemos observar que el resto de la división, efectivamente, es $\mathbf{-7}$

(b) El polinomio $\boldsymbol{P(x) = 4x^3 + 22x + kx - 10}$ *tiene como divisor exacto a* $\boldsymbol{\left(x - \frac{1}{2}\right)}$

Si el binomio $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ es divisor exacto de $P(x)$, entonces $x = \frac{1}{2}$ tiene que ser una de sus raíces o ceros. Es decir

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Realizamos un procedimiento similar al aplicado en el ítem anterior,

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\
4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 22\left(\frac{1}{2}\right) + k\left(\frac{1}{2}\right) - 10 &= 0 \\
\frac{3}{2} + \frac{1}{2}k &= 0 \\
\frac{1}{2}k &= -\frac{3}{2} \\
k &= \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 2 \\
\boxed{\boldsymbol{k = -3}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, con $\boldsymbol{k = -3}$ el polinomio $P(x)$ cumple con la condición dada.

1.8.5. Teorema de Gauss

El proceso para encontrar raíces de un polinomio y, en consecuencia, poder determinar los divisores exactos del mismo, puede resultar tedioso. Sin embargo, el *teorema de Gauss* nos brinda información importante sobre sus raíces, permitiendo una búsqueda más dirigida.

> ***Teorema de Gauss:*** *Sea* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *un polinomio con coeficientes enteros. Se verifica que si* $P(x)$ *tiene raíces racionales de la forma* p/q, *entonces* p *es un divisor de* a_0 *y* q *es un divisor de* a_n.

Podemos interpretar a partir de este teorema que, si el polinomio tiene coeficiente entero, el coeficiente principal y el término independiente nos proveen información sobre las "posibles" raíces del mismo. Veamos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10: *Encontrar todos los binomios divisores exactos de la forma* $(x-k)$ *(con* $k \in \mathbb{R}$*) de los siguientes polinomios:*

(a) $A(x) = x^2 - 2x - 15$

Como vimos anteriormente, para encontrar los binomios de la forma $(x - k)$ que sean divisores exactos de $A(x)$ basta con encontrar todas las $k \in \mathbb{R}$ que son raíces. Como todos sus coeficientes son números enteros, podemos utilizar el *teorema de Gauss.*

En primer lugar, encontremos todos los divisores del coeficiente principal. Dichos números forman un conjunto al cual denominaremos q. En el caso de este polinomio, su coeficiente principal tiene solo dos divisores enteros: -1 y 1. Por lo tanto,

$$\text{Divisores de } a_2 = 1\text{: } q = \{-1; 1\}$$

De manera análoga, determinamos el conjunto p, formado por todos los divisores enteros del término independiente.

$$\text{Divisores de } a_0 = -15\text{: } p = \{-1; 1; -3; 3; -5; 5; -15; 15\}$$

Finalmente, las raíces racionales del polinomio $A(x)$ tienen que pertenecer al conjunto formado por todos los posibles cocientes entre los divisores de $a_2 = 1$ y los divisores de $a_0 = -15$.

$$\frac{p}{q} = \{-1; 1; -3; 3; -5; 5; -15; 15\}$$

Observemos que, en este caso, los conjuntos p y $\frac{p}{q}$ coinciden. Esto se debe a que el coeficiente principal es igual a 1. Todas las fracciones determinadas al realizar los cocientes tienen como denominador a 1 o a -1.

Analizaremos ahora cuáles de los elementos del último conjunto determinado son raíces del polinomio $A(x)$ empleando el *teorema del resto*.

Comencemos, por ejemplo, con $x = -1$,

$$A(\mathbf{-1}) = (\mathbf{-1})^2 - 2(\mathbf{-1}) - 15 = -12$$

Lo cual nos indica que $x = -1$ no es una raíz de $A(x)$, esto es equivalente a decir que $(x + 1)$ no es divisor exacto de él.

Con $x = 1$ tenemos,

$$A(\mathbf{1}) = (\mathbf{1})^2 - 2(\mathbf{1}) - 15 = -16$$

Llegamos a la misma conclusión: $(x - 1)$ no es divisor exacto de $A(x)$, porque al hacer $A(x): (x - 1)$ obtendremos un resto de -16.

Con $x = -3$

$$A(\mathbf{-3}) = (\mathbf{-3})^2 - 2(\mathbf{-3}) - 15 = 0$$

Hemos encontrado una raíz y, por lo tanto, podemos afirmar que el binomio $(\boldsymbol{x} + \mathbf{3})$ es divisor exacto de $A(x) = x^2 - 2x - 15$.

Sucede los mismo con $x = 5$,

$$A(\mathbf{5}) = (\mathbf{5})^2 - 2(\mathbf{5}) - 15 = 0$$

Otro divisor exacto es $(\boldsymbol{x} - \mathbf{5})$**.**

Ahora podemos preguntarnos: ¿tendrá otros divisores exactos?

La respuesta es negativa. Por el *teorema fundamental del Álgebra* sabemos que un polinomio de grado n tendrá n raíces. En este caso, $A(x)$ es un polinomio de segundo grado y solo puede tener, a lo sumo, dos raíces. Como ya las hemos encontrado, podemos afirmar que los dos únicos binomios de la forma $(x - k)$ que son divisores exactos son:

$$\boxed{(\boldsymbol{x} + \mathbf{3})} \quad \text{y} \quad \boxed{(\boldsymbol{x} - \mathbf{5})}$$

(b) $B(x) = 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6$

Realizamos un procedimiento similar al ítem anterior: analizando los divisores del coeficiente principal y del término independiente

$$Divisores\ de\ \boldsymbol{a_0} = \boldsymbol{6}:\ p = \{1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6\}$$

$$Divisores\ de\ \boldsymbol{a_3} = \boldsymbol{2}: q = \{1; -1; 2; -2\}$$

Encontramos las posibles raíces de $B(x)$.

$$\frac{p}{q} = \left\{1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 2; -2; 3; -3; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; 6; -6\right\}$$

Calculamos el valor numérico de $B(x)$ evaluando las distintas posibilidades.
Para $\frac{p}{q} = 1$

$$B(\mathbf{1}) = 2(\mathbf{1})^3 + 2(\mathbf{1})^2 - 10(\mathbf{1}) + 6 = 0$$

Por lo tanto, sabemos que el binomio $(\boldsymbol{x - 1})$ es un divisor exacto de $B(x)$, por el teorema del resto.
Para $\frac{p}{q} = -1$

$$B(\mathbf{-1}) = 2(\mathbf{-1})^3 + 2(\mathbf{-1})^2 - 10(\mathbf{-1}) + 6 = 16$$

Si dividimos $B(x)$ por $(x + 1)$ obtendremos un resto igual a 16. Podemos afirmar que este **no** será un divisor exacto.
Siguiendo este procedimiento para todas los posibles de p/q, determinamos que $x = -3$ también es una raíz de $B(x)$, ya que

$$B(\mathbf{-3}) = 2(\mathbf{-3})^3 + 2(\mathbf{-3})^2 - 10(\mathbf{-3}) + 6 = 0$$

El binomio $(\boldsymbol{x + 3})$ es otro divisor exacto de $B(x)$ y por el *teorema fundamental del Álgebra* podemos afirmar que $B(x)$ tiene, a lo sumo, tres raíces. Sin embargo, hasta el momento solo encontramos dos, $x = 1$ y $x = -3$. ¿Serán esas sus únicas dos raíces?
Para asegurarnos, podemos utilizar la *regla de Ruffini*.
En primer lugar, $x = 1$ es una raíz, dividimos $B(x)$ por $(x - 1)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 2 & -10 & 6 \\ 1 & & 2 & 4 & -6 \\ \hline & 2 & 4 & -6 & 0 \end{array}$$

Podemos afirmar que,

$$2x^3 + 2x^2 - 10x + 6 = (2x^2 + 4x - 6)(x - 1)$$

Ahora dividamos el trinomio $2x^2 + 4x - 6$ por $(x + 3)$, ya que es otro divisor exacto,

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 4 & -6 \\ -3 & & -6 & 6 \\ \hline & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$2x^2 + 4x - 6 = (2x - 2)(x + 3)$$

Finalmente podemos expresar $B(x)$, como

$$B(x) = (2x - 2)(x + 3)(x - 1)$$

Ahora bien, si buscamos las raíces del polinomio tenemos que determinar los valores de x que hacen que $P(x) = 0$. Igualdad que también podemos expresar como,

$$(2x - 2)(x + 3)(x - 1) = 0$$

Como el primer miembro de esta igualdad es un producto y solo puede dar cero cuando uno de los factores es precisamente cero, hay tres posibles raíces. Dos de ellas ya fueron encontradas:

$$x + 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = -3}$$
$$x - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = 1}$$

Por la propiedad distributiva, podemos expresar $P(x)$ como

$$\boldsymbol{P(x) = 2(x - 1)(x + 3)(x - 1)}$$

O de forma equivalente,

$$\boldsymbol{P(x) = 2(x-1)^2(x+3)}$$

Podemos concluir, entonces, que los divisores exactos del polinomio son los binomios:

$$\boxed{\boldsymbol{(x-1)}} \text{ y } \boxed{\boldsymbol{(x+3)}}$$

Si el coeficiente principal de un polinomio con coeficientes enteros es 1 ¿Qué podemos afirmar acerca de sus raíces racionales?

Entonces, ¿$(x-1)$ es dos veces divisor exacto de $B(x)$? o de manera equivalente: ¿$x=1$ es dos veces la raíz de $B(x)$? Es el momento de realizar la siguiente definición:

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios y $m \in \mathbb{N}$. Diremos que k es una raíz de $P(x)$ con ***multiplicidad*** *m si*

$$P(x) = (x-k)^m Q(x)$$

En el ejemplo 10 determinamos que,

$$B(x) = 2(x-1)^2(x+3)$$

Por lo tanto, $x=1$ es una raíz de multiplicidad 2, o doble, y $x=-3$ es de multiplicidad 1, o simple.
Al observar la última igualdad encontrada, las raíces del polinomio quedan en evidencia a simple vista. Está forma de expresar polinomios es muy útil en diferentes contextos, como por ejemplo a la hora de encontrar las intersecciones de las funciones polinómicas con el eje de abscisas, como veremos en el capítulo dedicado a funciones. Es por ello, que recibe un nombre especial: forma factorizada. La pregunta que surge ahora es: ¿Existe alguna manera de encontrar la forma factorizada de un polinomio sin la necesidad de encontrar primero sus raíces? La respuesta a esta interrogante es afirmativa y la analizaremos en el siguiente apartado.

1.9. Factorización

Recordemos la factorización de números naturales como el producto de números primos.
Por ejemplo, es fácil comprobar que 600 se factoriza a partir de números primos de la siguiente manera:

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Esta descomposición de factores tiene su analogía en los polinomios.
Por ejemplo, el polinomio $2x^2 + 4x - 6$ quedó factorizada de la siguiente manera

$$2x^2 + 4x - 6 = 2(x-1)^2(x+3)$$

y en el ejemplo de producto de binomios conjugados $x^2 - 4$ quedó factorizado así:

$$x^2 - 4 = (x-2) \cdot (x+2)$$

De manera general podemos decir que todo polinomio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 \; con \; n \in \mathbb{N}$$

admite una única descomposición en factores de la forma $(x - k_i)$, donde k_i es una raíz de $P(x)$, de tal manera que,

$$P(x) = a_n(x-k_n)(x-k_{n-1}) \ldots (x-k_1)$$

Debemos notar que el coeficiente principal del polinomio es el factor a_n.
Puede ocurrir, como vimos en el último ejemplo del apartado anterior, que haya más de un factor con la misma raíz (múltiple). En estos casos, podemos definir la descomposición factorial de $P(x)$ como,

$$P(x) = a_n(x-k_n)^{w_n}(x-k_{n-1})^{w_{n-1}} \ldots (x-k_1)^{w_1}$$

donde $w_1, w_2, \ldots, w_n$ representan la multiplicidad de las raíces $k_n, k_{n-1}, \ldots, k_1$ respectivamente.
Pasemos a analizar ciertas técnicas que nos permitirán factorizar polinomios.

1.9.1. Factorización de polinomios a partir de una raíz

Para factorizar polinomios, podemos seguir el siguiente orden:

- *Se buscan las posibles raíces utilizando el teorema de Gauss.*
- *Aplicando el teorema del resto se determina cuáles son raíces y entonces son los divisores exactos de $P(x)$.*
- *Gracias al teorema fundamental del Álgebra, se sabe cuántas raíces tiene el polinomio.*
- *Mediante sucesivas divisiones por la regla de Ruffini se logra escribir en forma factorizada al polinomio.*

Ejemplo 11: *Factorizar el siguiente polinomio*

$$S(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + x^2 - 2x + 1$$

Según el *teorema de Gauss* las posibles raíces son 1 o -1.
Con $x = 1$:

$$S(\mathbf{1}) = \mathbf{1}^6 - 2 \cdot \mathbf{1}^5 + \mathbf{1}^4 + \mathbf{1}^2 - 2 \cdot \mathbf{1} + 1 = 0$$

Entonces, por el teorema de resto, podemos afirmar que 1 es raíz y $(x-1)$ es un factor de $S(x)$.
Con $x = -1$:

$$S(\mathbf{-1}) = (\mathbf{-1})^6 - 2(\mathbf{-1})^5 + (\mathbf{-1})^4 + (\mathbf{-1})^2 - 2(\mathbf{-1}) + 1 = 8 \neq 0$$

Por lo tanto -1 no es raíz y $S(x)$ no admite como factor al binomio $(x+1)$.
Aplicando la *regla de Ruffini* dos veces nos queda,

$$S(x) = (x-1)(x-1)(x^4+1) = (x-1)^2(x^4+1)$$

Ahora observemos el factor (x^4+1), ¿se podrá factorizar?
Para poder responder esta pregunta, intentemos encontrar sus raíces. Para ello, debemos resolver la ecuación,

$$x^4 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^4 = -1$$

La última igualdad nos indica que tenemos que buscar un número real que elevado a la cuarta sea igual a -1, lo cual es imposible en el campo de los números reales. Es decir, no podemos seguir factorizando y nos queda:

$$\boxed{\boldsymbol{S(x) = (x-1)^2(x^4+1)}}$$

1.9.2. Factor común

Se trata de una aplicación directa de la propiedad distributiva[1] de la multiplicación con respecto a la suma o la resta. Solo se presenta "al revés" de lo que habitualmente se hace, es decir se parte de $a \cdot b \pm a \cdot c$, se ve que en cada término aparece el factor a, entonces se extrae y queda,

$$a \cdot b \pm a \cdot c = a \cdot (b \pm c)$$

En el caso de cualquier expresión algebraica o de un polinomio, si en todos los términos figura un factor común, entonces dicha expresión es igual al producto de ese factor por la expresión que resulta al dividir cada término por ese factor.
Por ejemplo, dado $Q(x) = 30x^5 + 18x^4 - 42x^3 + 6x^2$ observamos que

$$Q(x) = \mathbf{6x^2} \cdot 5x^3 + \mathbf{6x^2} \cdot 3x^2 - \mathbf{6x^2} \cdot 7x + \mathbf{6x^2} \cdot 1$$

lo cual, no permite expresarlo como,

$$Q(x) = \mathbf{6x^2}(5x^3 + 3x^2 - 7x + 1)$$

Concluimos que el polinomio $Q(x)$ tiene al cero como raíz doble.
Esta manera de utilizar la propiedad distributiva también se puede emplear en otro tipo de expresiones algebraicas. Por ejemplo, analicemos la siguiente expresión:

$$10x^3y^2 + 5x^2y^2 - 15x^2y$$

Para determinar el factor común se analiza cada término buscando factores repetidos. En este caso, tenemos que los coeficientes son múltiplos de 5 y, además, siempre aparecen x e y.

$$\begin{aligned} 10x^3y^2 + 5x^2y^2 - 15x^2y &= \mathbf{5x^2y} \cdot 2xy + \mathbf{5x^2y} \cdot y - \mathbf{5x^2y} \cdot 3 \\ &= \boxed{5x^2y(2xy + y - 3)} \end{aligned}$$

[1]

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c \qquad \textit{Propiedad distributiva de la multiplicación}$$

1.9.3. Factor común por grupos

A veces, aunque los términos de una expresión algebraica no tengan un único factor común, es posible agrupar términos de tal manera que cada grupo sí lo tenga.

En el caso de la expresión,

$$ac - 2ad + 3a + bc - 2bd + 3b$$

observemos que sus términos no tienen un factor común a los seis términos. Sin embargo, en los tres primeros se repite el factor a y los tres últimos el factor b, entonces podemos agruparlos convenientemente como,

$$(ac - 2ad + 3a) + (bc - 2bd + 3b)$$

Ahora sí, cada grupo tiene un factor común:

$$a\boldsymbol{(c - 2d + 3)} + b\boldsymbol{(c - 2d + 3)}$$

Notemos que el factor $c - 2d + 3$ aparece en ambos términos. Tomándolo como factor común nos queda,

$$(a + b)\boldsymbol{(c - 2d + 3)}$$

Podemos aplicar este procedimiento para factorizar un polinomio. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} T(x) &= 4x^3 - x^2 - 36x + 9 \\ &= (4x^3 - x^2) + (-36x + 9) \\ &= x^2\boldsymbol{(4x - 1)} - 9\boldsymbol{(4x - 1)} \\ &= (x^2 - 9)(4x - 1) \end{aligned}$$

Si sacamos factor común 4 en el factor $4x - 1$ nos queda,

$$T(x) = 4(x^2 - 9)\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

Para terminar de factorizar $T(x)$, solo nos falta encontrar los divisores exactos de $x^2 - 9$:
A continuación, analizaremos un método práctico para encontrar los factores de estos tipos de binomios.

1.9.4. Diferencia de cuadrados

Como vimos en el apartado dedicado a los productos notables, multiplicar dos binomios conjugados es sencillo si seguimos la siguiente regla,

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

La regla de este producto notable nos ayuda a encontrar rápidamente los divisores de un binomio compuesto por una diferencia de cuadrados.
En el último ejemplo llegamos a determinar que,

$$T(x)=4(x^2-9)\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

El factor x^2-9 es una diferencia de cuadrados ya que

$$x^2-9=x^2-3^2$$

y por lo tanto podemos expresarlo como,

$$x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$$

Finalmente, la forma factorizada de $T(x)$ es,

$$T(x)=4(x+3)(x-3)\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

Por lo tanto, sus raíces son $x=-3, x=3$ y $x=\frac{1}{4}$
Esta misma estrategia la podemos usar para factorizar la siguiente expresión algebraica,

$$81x^4y^{10}-4z^2w^6$$

Observemos que el primer término es el cuadrado de $9x^2y^5$, ya que

$$(9x^2y^5)^2=9^2(x^2)^2(y^5)^2=81\,x^4y^{10}$$

De manera análoga, el segundo término resulta ser el cuadrado de $2z\,w^3$
Entonces reemplazando en

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

nos queda,

$$81x^4y^{10}-4z^2w^6=\left(\mathbf{9x^2y^5}\right)^2-(\mathbf{2zw^3})^2=\boxed{(\mathbf{9x^2y^5+\ 2z\,w^3})(\mathbf{9x^2y^5-\ 2z\,w^3})}$$

Ejemplo 12: *Factorizar los siguientes polinomios:*

(a) $S(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + x^2 - 2x + 1$
Volvamos a pensar la factorización de $S(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + x^2 - 2x + 1$ pero ahora haciendo factor común por grupos

$$\begin{aligned} S(x) &= (x^6 - 2x^5 + x^4) + (x^2 - 2x + 1) \\ &= x^4(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2x + 1) \\ &= (x^2 - 2x + 1)(x^4 + 1) \end{aligned}$$

Como el primer factor resulta ser un trinomio cuadrado perfecto,

$$\boxed{\boldsymbol{S(x) = (x-1)^2(x^4+1)}}$$

(b) $N(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1$
Formamos grupos

$$(x^6 - x^4) + (-x^2 + 1)$$

Sacando factor común x^4 en el primer grupo y -1 en el segundo grupo, nos queda,

$$\boldsymbol{x^4}(x^2 - 1) \boldsymbol{- 1}(x^2 - 1)$$

Sacando factor común $(x^2 - 1)$ de ambos grupos,

$$(x^2 - 1)(x^4 - 1)$$

Tenemos ahora dos diferencias de cuadrados,

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

Y aparece otra vez la diferencia de cuadrados $(x^2 - 1)$. Por lo que $N(x)$ nos queda:

$$\begin{aligned} N(x) &= (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \\ &= \boxed{\boldsymbol{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)}} \end{aligned}$$

Puede suceder que tengamos que determinar una expresión algebraica o polinomio que cumpla con ciertas condiciones. Un ejemplo de esta situación se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13: *Encuentre un polinomio de cuarto grado cuyos ceros o raíces son -1, 3 (doble), 5 y* $P(0) = 10$. *Exprese el polinomio en su forma factorizada.*

Si el polinomio tiene por raíces a -1, 3 y 5, en la factorización deben aparecer los factores $(x+1)$, $(x-3)$ y $(x-5)$.
Además, nos dicen que 3 es raíz doble, o sea que el factor $(x-3)$ debe estar al cuadrado.
Es decir, $P(x)$ tiene la forma,

$$P(x) = a(x+1)(x-3)^2(x-5) \ \ (\mathbf{1})$$

Nos falta determinar el coeficiente a.
Otro dato que nos brindan es $P(0) = 10$. Entonces reemplazando en $P(x)$ el valor 0 e igualando a 10 nos queda la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} P(0) &= 10 \\ a(\mathbf{0}+1)(\mathbf{0}-3)^2(\mathbf{0}-5) &= 10 \\ a(-45) &= 10 \\ a &= \frac{10}{-45} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}} \end{aligned}$$

Reemplazando el valor encontrado de a en $(\mathbf{1})$, finalmente encontramos el polinomio solicitado:

$$\boxed{\boldsymbol{P(x) = -\frac{2}{9}(x+1)(x-3)^2(x-5)}}$$

1.9.5. Factorización de polinomios de segundo grado

Debido a que tiene diversas aplicaciones dentro y fuera de la Matemática, el análisis de los polinomios de segundo grado tiene una gran importancia.
Los polinomios de segundo grado pueden ser una diferencia de cuadrados, un trinomio cuadrado perfecto o simplemente un trinomio.

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

En caso de tener raíces reales, pueden encontrarse fácilmente utilizando la ya conocida *fórmula*:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

conocida como "*resolvente*" que se obtiene trabajando de manera general a partir del completamiento de cuadrados.
Si $b^2 - 4ac > 0$ resulta que $x_1 \neq x_2$ y en ese caso la forma factorizada para $P(x)$ será:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si $b^2 - 4ac = 0$ resulta que $x_1 = x_2$ y en ese caso la forma factorizada para $P(x)$ será:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_1) = a\,(x - x_1)^2$$

Y si $b^2 - 4ac < 0$ resulta que $P(x)$ no tiene raíces reales y en ese caso no se factoriza en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 14: *Expresar, de ser posible, en forma factorizada los siguientes polinomios:*

(a) $K(x) = 3x^2 + 12x - 36$
Con la ayuda de la fórmula resolvente encontramos sus raíces

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(3)(-36)}}{2(3)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

La forma factorizada será,

$$\boxed{\boldsymbol{K(x) = 3(x + 6)(x - 2)}}$$

(b) $R(x) = 3x^2 + 6x + 3$
Con la ayuda de la fórmula resolvente encontramos sus raíces

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(3)}}{2(3)}$$

Pero como $6^2 - 4(3)(3) = 0$, concluimos que,

$$x_1 = x_2 = \frac{-6}{2 \cdot 3} = -1$$

Llegando a la forma factorizada:

$$\boxed{\boldsymbol{R(x) = 3(x+1)(x+1) = 3(x+1)^2}}$$

(c) $M(x) = 3x^2 + 12x + 36$
Al aplicar la fórmula resolvente,

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(3)(36)}}{2(3)}$$

determinamos que,

$$12^2 - 4(3)(36) = 144 - 432 = -288 < 0$$

Lo cual no indicaría que no tiene raíces reales y, por lo tanto, no tiene forma factorizada en $\mathbb{R}$.

1.10. Expresiones algebraicas fraccionarias

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, tal que $Q(x)$ sea distinto de cero, se denomina ***expresión algebraica fraccionaria*** a toda expresión de la forma,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Son ejemplos de expresiones algebraicas fraccionarias las siguientes:

$$\frac{3x}{x^3 - 5x} \quad \forall x: x \neq 0 \; y \; |x| \neq \sqrt{5}$$

$$\frac{x^2 + 2x}{x^3 - 2x^2 + 1x} = \frac{x(x+2)}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{x(x+2)}{x(x-1)^2} \quad \forall x: x \neq 0 \; y \; x \neq 1$$

$$\frac{x}{x^2 - 4} \forall x: x \neq 2 \; y \; x \neq -2$$

Notemos que siempre es necesario aclarar las condiciones que debe cumplir la variable para que no hagan cero al denominador.

Se dice que una expresión algebraica fraccionaria es *irreducible* si no existen factores comunes al numerador y al denominador. De los ejemplos anteriores, solo la última es irreducible.
Para simplificar una expresión algebraica fraccionaria debemos factorizar numerador y denominador para poder simplificar los factores comunes, Obtendremos de esta manera, una expresión irreducible equivalente a la anterior, donde la condición de posibilidad es la dada por la expresión original.

Ejemplo 15: *Simplifique las siguientes fracciones algebraicas*
(a)

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-9x^2+27x-27}$$

En primer lugar, podemos factorizar el numerador. Como x^2-6x+9 es un trinomio cuadrado perfecto, podemos expresarlo como,

$$(x-3)^2$$

Para factorizar el denominador, no podemos intentar factor común simple o por grupos. Tendremos que aplicar un camino más extenso, utilizando los teoremas antes vistos.
Si buscamos las posibles raíces empleando el *teorema de Gauss,* tenemos que pueden ser: $\pm1, \pm3, \pm9, \pm27$
Apliquemos *teorema del resto* y observamos que,

$$Q(\pm1) \neq 0$$
$$Q(3) = 0$$

Entonces $x = 3$ es raíz y por lo tanto $Q(x)$ es divisible por $(x-3)$.
Dividimos por regla de Ruffini a $Q(x)$ por $(x-3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & 27 & -27 \\ 3 & & 3 & -18 & 27 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array}$$

Obtenemos que,

$$x^3-9x^2+27x-27 = (x-3)(x^2-6x+9) = (x-3)(x-3)^2 = (x-3)^3$$

Reemplazando las factorizaciones encontradas y simplificando nos queda,

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-9x^2+27x-27}=\frac{(x-3)^2}{(x-3)^3}=\boxed{\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})}}$$

(b)

$$\frac{x^5-16x}{x^2-2x}$$

Sacando factor común en numerador y denominador nos queda,

$$\frac{x^5-16x}{x^2-2x}=\frac{x(x^4-16)}{x(x-2)}$$

En el numerador tenemos una diferencia de cuadrados,

$$(x^4-16)=(x^2-4)(x^2+4)$$

Y a su vez, su primer factor es otra diferencia de cuadrados,

$$(x^4-16)=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

Reemplazando y simplificando, obtenemos,

$$\frac{x^5-16x}{x^2-2x}=\frac{x(x^4-16)}{x(x-2)}=\frac{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})(x+2)(x^2+4)}{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}=\boxed{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4})}$$

¿Cuáles son las condiciones de validez para las expresiones algebraicas del ejemplo anterior?

1.10.1. Operaciones combinadas con expresiones algebraicas

Para resolver las operaciones combinadas debemos tener en cuenta la simplificación, multiplicación, división, suma y resta de fracciones algebraicas. Estas operaciones se rigen bajo las mismas reglas que los números racionales, las cuales recordaremos a continuación,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

En el caso de la suma, recordemos que si es una suma de tres o más se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores, que se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.
Para resolver una operación combinada conviene:

- *Separar en términos.*
- *Efectuar las operaciones indicadas en cada término.*
- *Simplificar, sin modificar la condición de posibilidad.*

Ejemplo 16: *Efectuar las siguientes operaciones combinadas:*

(a)

$$\frac{\frac{1}{x}-3}{\frac{x+2}{x^2}}-\frac{3x}{x+2}=$$

	Procedimientos realizados
$\dfrac{\frac{1-3x}{x}}{\frac{3x+2}{x^2}}-\dfrac{3x}{3x+2}=$	Sacamos común denominador en el numerador del primer término.
$=\dfrac{1-3x}{x}\cdot\dfrac{x^2}{3x+2}-\dfrac{3x}{3x+2}=$	Aplicamos $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$
$=\dfrac{(1-3x)x^2}{x(3x+2)}-\dfrac{3x}{3x+2}=$	Aplicamos $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$
$=\dfrac{(1-3x)x}{(3x+2)}-\dfrac{3x}{3x+2}=$	Simplificamos x en el primer término
$=\dfrac{(1-3x)x-3x}{(3x+2)}=$	Aplicamos $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$
$=\dfrac{x-3x^2-3x}{(3x+2)}=$	Distribuimos en el numerador

$$= \frac{-3x^2 - 2x}{(3x + 2)} =$$ Agrupamos términos

$$= \frac{-x(3x + 2)}{(3x + 2)} =$$ Sacamos factor común - x

$$= \boxed{-x}$$ Finalmente, simplificamos

(b)

$$\frac{\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{(x + 1)^2}}{\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(x - 1)^2}} - \frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2}$$

Primer término	Procedimientos realizados
$$= \frac{\frac{(x + 1)(x^2 + 2x + 1)}{(x + 1)^2}}{\frac{(x - 1)(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)^2}} =$$	Factorizamos los numeradores. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ tiene como raiz a -1. Aplicamos Ruffini y nos queda $(x + 1)(x^2 + 2x + 1)$ $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ tiene raíz 1 Por Ruffini, obtenernos $(x - 1)(x^2 - 2x + 1)$
$$\frac{(x + 1)(x^2 + 2x + 1)}{(x + 1)^2} : \frac{(x - 1)(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)^2}$$	Aplicamos $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$
$$\frac{(x + 1)(x^2 + 2x + 1)}{(x + 1)^2} \cdot \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x^2 - 2x + 1)}$$	Aplicamos $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
$$\frac{(x + 1)^2}{(x + 1)} \cdot \frac{(x - 1)}{(x - 1)^2}$$	Simplificamos y factorizamos los trinomios cuadrados perfectos

$\dfrac{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})}$	Simplificamos nuevamente

Segundo término	Procedimientos realizados
$\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$	Factorizamos aplicando diferencia de cuadrados
$\dfrac{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})}$	Simplificamos

Rearmamos la expresión inicial, con las simplificaciones realizadas.

$$\frac{\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{(x+1)^2}}{\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{(x-1)^2}}-\frac{x^2-1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)}{(x-1)}-\frac{(x-1)}{(x+1)}=$$

Para realizar la resta, aplicamos $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$

$$=\frac{(x+1)}{(x-1)}-\frac{(x-1)}{(x+1)}=\frac{(x+1)(x+1)-(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Al aplicar la propiedad distributiva en las multiplicaciones y agrupando términos semejantes, obtenemos el resultado deseado.

$$=\frac{(x+1)(x+1)-(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\boxed{\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})}}$$

¿Cuáles son las condiciones de validez para las expresiones del ejemplo 15?

1.11. Aplicaciones físicas

1.11.1. Máquinas simples

En estática vimos el concepto de momento de una fuerza y cómo aplicar este concepto al caso de una llave utilizada para aflojar una tuerca.
Así como con la llave, la idea de brazo de palanca es una de las ideas más importantes a la hora de transmitir un momento para levantar o mover un cuerpo.
Con esto en mente, a lo largo de la historia se fueron creando diversos dispositivos que se valen de esta herramienta. Algunos de ellos sencillos, a los que llamaremos máquinas simples.
Estos dispositivos nos permiten realizar una fuerza menor a la necesaria para mover un cuerpo si la fuerza la aplicáramos directamente sobre dicho cuerpo.

- Máquinas simples
  - Palanca
    - de 1° grado
    - de 2° grado
    - de 3° grado
  - Polea
    - Móvil
    - Fija
  - Aparejo
    - Factorial
    - Potencial
  - Torno

En esta unidad trabajaremos ***escalarmente***, es decir, cuando nos referimos a una fuerza estaremos hablando de su módulo, o la magnitud de la misma.

1.11.2. Las palancas

Una palanca es una barra rígida que tiene la posibilidad de girar en torno a un punto de apoyo. Se las clasifica en tres grados:

Palanca de primer grado

En este dispositivo, el punto de apoyo se encuentra entre la fuerza aplicada para mover un cuerpo y el cuerpo a mover.

Ejemplo de este tipo de palancas son las balanzas de dos platillos, los alicates, las tijeras, el sube y baja, entre otros.
Esquemáticamente,

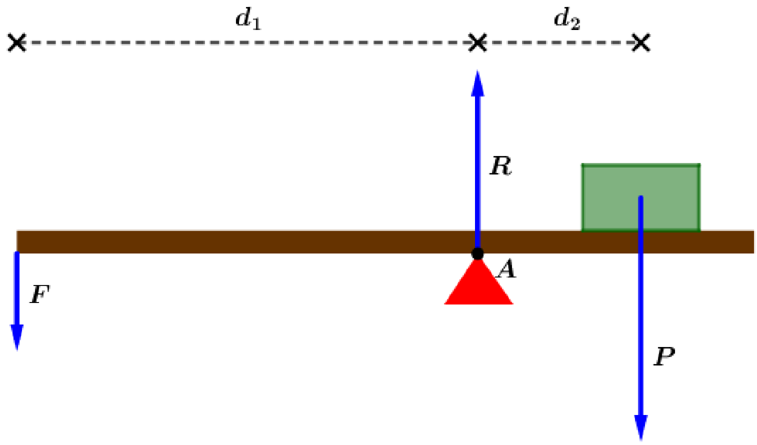


Figura 3

Donde la caja a mover de peso P se encuentra a una distancia d_2 del punto de apoyo A, y la fuerza a ejercer será F, y la aplicaremos a una distancia d_1 del apoyo, cuya reacción R es la fuerza equilibrante de P y F. Idealmente, en orden de realizar un menor esfuerzo, cuanto mayor sea la distancia d_1 con respecto a d_2 mayor será el brazo de palanca y por lo tanto menor será la fuerza F necesaria para mover la caja.
La condición de equilibrio del sistema estará dada por la expresión:

$$\boxed{\mathrm{F}.d_1 = P.d_2}$$

d_1: Se denomina ***brazo de potencia*** o ***brazo de palanca*** y es la distancia entre el punto en el que aplicamos la potencia y el punto de apoyo (***fulcro***).
d_2: Se denomina ***brazo de resistencia*** a la distancia entre el punto en el que aplicamos la resistencia y el (***fulcro***).

Ejemplo 17: *Un trabajador necesita levantar un objeto que pesa 400 N con una palanca, cuyo brazo de palanca mide 1,5 m, y el de resistencia 30 cm, ¿Qué fuerza necesita aplicar para mover el objeto?*

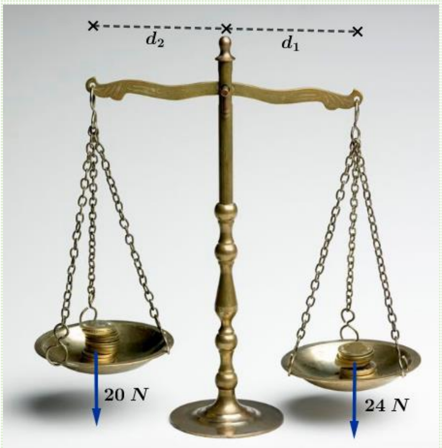
Sabemos que

$$\mathrm{F}.1{,}5m = 400N.0{,}3m$$

Entonces

$$F = \frac{400N.0{,}3m}{1{,}5m} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{F = 80N}}$$

Ejemplo 18: *En una balanza de dos platillos alterada, se colocan en cada platillo monedas con un peso total de* $20\,N$ *y* $24\,N$ *respectivamente. ¿Podríamos calcular las distancias de los platillos al punto de apoyo sabiendo que la balanza se encuentra en equilibrio?*



Sabemos que para que se mantenga el equilibrio, debe cumplirse la relación,

$$20\,N \cdot d_1 = 24N \cdot d_2$$

Entonces

$$d_1 = \frac{24\,N}{20\,N} \cdot d_2 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{d_1 = 1{,}2 \cdot d_2}}$$

Lo que nos dice que para poder mantener el equilibrio, la balanza estaba trucada de tal forma que uno de sus brazos era 1,2 veces la longitud del otro, o un 20% más largo que el otro.

Palanca de segundo grado

En este dispositivo, el punto de apoyo se encuentra en un extremo de la barra, y el cuerpo a mover está posicionado en un lugar intermedio entre la fuerza aplicada en el otro extremo y el punto de apoyo.
Esquemáticamente,

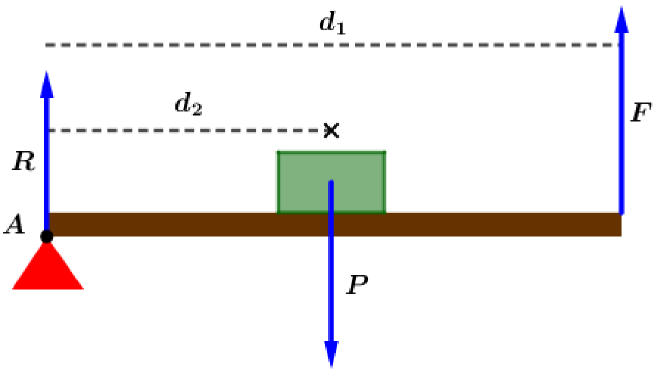


Figura 4

Donde la caja a mover de peso P se encuentra a una distancia d_2 del punto de apoyo A, y la fuerza F la aplicaremos a una distancia d_1 de A, cuya reacción R es la fuerza equilibrante de P y F.
La condición de equilibrio del sistema nuevamente será

$$\boxed{F \cdot d_1 = P \cdot d_2}$$

Ejemplo de este tipo de palancas son la carretilla, el cascanueces y el destapador.

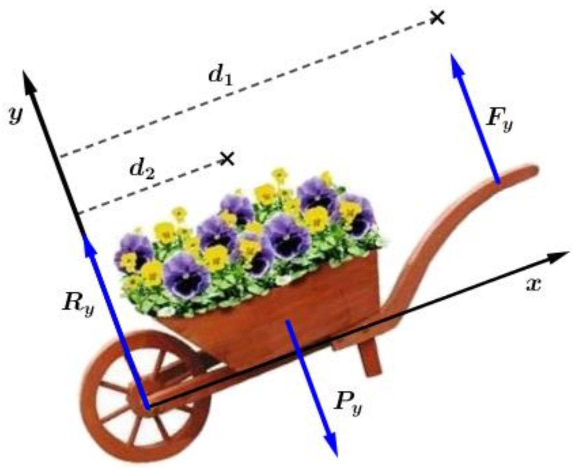


Figura 5

En la Figura 5, si consideramos el peso del objeto que carga la carretilla concentrado a una distancia d_2 de la rueda de apoyo, para poder levantar la carga, deberemos aplicar una fuerza F, cuya componente en el eje y, saldrá de la relación:

$$F_y \cdot d_1 = P_y \cdot d_2$$

Por lo tanto

$$F_y = \frac{P_y \cdot d_2}{d_1}$$

Nuevamente, cuanto más largo sea el brazo de palanca d_1 (observemos que d_1 es inversamente proporcional a F_y) menor resultará la fuerza a aplicar para poder levantar la carga.

Ejemplo 19: *Si para levantar una carga que podemos considerar concentrada a 40 cm de la rueda de apoyo de una carretilla, necesitamos aplicar una fuerza con una magnitud de 500 N perpendicular al eje de la carretilla. ¿Cuál es el peso de la carga a levantar si la distancia entre el extremo de la carretilla (punto de aplicación de la fuerza) y la rueda de apoyo es de 120 cm?*

Sabemos que

$$F \cdot d_1 = P \cdot d_2$$

En nuestro caso

$$500\ N \cdot 120\ cm = P \cdot 40\ cm \implies P = \frac{500\ N \cdot 120\ cm}{40\ cm}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P = 1500\ N}}$$

Palanca de tercer grado

En este dispositivo, el punto de apoyo se encuentra en un extremo de la barra, y el cuerpo a mover está en el otro extremo, mientras que la fuerza es aplicada en un punto intermedio.
Esquemáticamente, lo podemos observar en la Figura 6

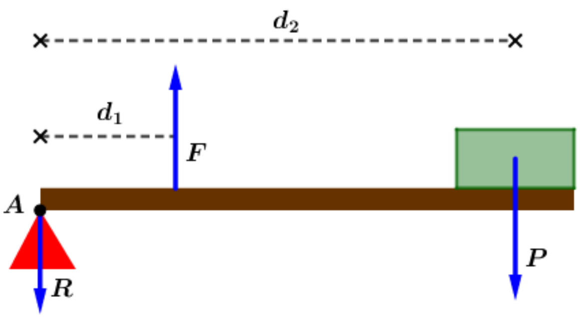


Figura 6

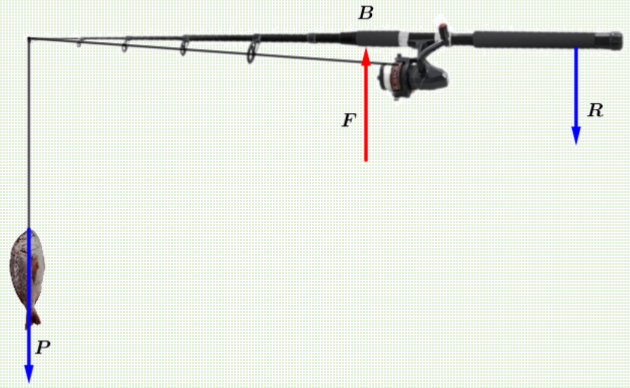
También en este caso la condición de equilibrio será

$$\boxed{F \cdot d_1 = P \cdot d_2}$$

Una particularidad de este dispositivo es que para que se mantenga el equilibrio, la fuerza a aplicar será mayor que la carga a levantar.
Ejemplos de este tipo de palancas son la caña de pescar, la pinza de depilar cejas, la abrochadora y el tenedor.

Ejemplo 20: *Si sostenemos una caña, en el punto B, a dos quintos de la longitud de la misma y aplicando una fuerza hacia arriba F, para levantar un pez que pesa $10\ N$. ¿Cómo deberá ser la fuerza para que se mantenga el equilibrio?*

Esquematicemos el problema:



Sabemos que

$$F \cdot d_1 = P \cdot d_2$$

En nuestro caso

$$F \cdot \frac{2}{5}\, L = 10\ N \cdot L \implies F = \frac{5}{2} \cdot \frac{10\ N \cdot L}{L}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F = 25\ N}}$$

O sea que la fuerza a aplicar será 2,5 veces mayor a la fuerza a vencer.

1.11.3. Poleas

Este dispositivo consta de una rueda acanalada que puede girar en torno a un eje. Alrededor de la canaleta se coloca una soga, correa o cadena que será la encargada de trasmitir el movimiento a la carga. Si el eje no se desplaza, se la llama *polea fija*, en caso de que el eje se desplace, estamos ante una *polea móvil*.

Polea fija

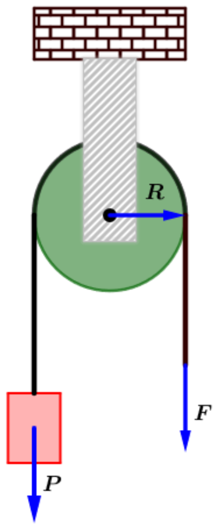


Figura 7

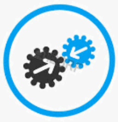
Podemos asociar este mecanismo con la palanca, donde tanto d_1 como d_2 serán iguales a la medida del radio R. Con lo que, de la condición de equilibrio,

$$F \cdot d_1 = P \cdot d_2$$

Nos queda

$$F \cdot R = P \cdot R \implies \boxed{F = P}$$

Es decir, que la fuerza a aplicar deberá ser de la misma magnitud que la fuerza a vencer para mantener el equilibrio.
Este tipo de dispositivos no aumenta ni reduce la fuerza a aplicar, pero cambia el sentido de la misma, lo cual puede ser de utilidad.



¿Qué sistema de referencia elegiría en el ejemplo anterior y cómo serían los vectores $\vec{F}$ y $\vec{P}$ referidos al mismo?

Polea móvil

En este mecanismo, el eje de la polea se desplaza, la polea inferior es móvil mientras que la superior es fija, esto nos permite tirar hacia abajo, lo que la hace más cómoda.

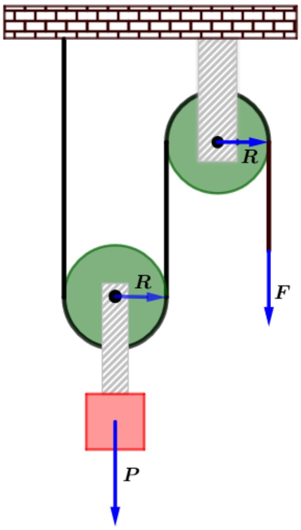


Figura 8

Podemos asociar este mecanismo con una palanca de segundo grado, con un punto de apoyo en un extremo, donde la correa se une al techo, y uno de los brazos de palanca tiene una longitud de R y el otro de $2R$. Con lo que, de la condición de equilibrio

$$F \cdot d_1 = P \cdot d_2$$

Nos queda

$$F \cdot 2R = P \cdot R \implies \boxed{F = \frac{P}{2}}$$

Es decir, que la fuerza a aplicar deberá ser de la mitad de la magnitud que la fuerza a vencer para mantener el equilibrio.

La desventaja de este mecanismo es que habrá que tirar de la soga el doble de la longitud que en la polea fija.
¿Por qué ocurre esto?

1.11.4. Aparejos

Estos dispositivos están formados por correas fijas y móviles, y pueden ser del tipo factorial o potencial. En ambos casos, reducen la fuerza a aplicar pero incrementan la longitud de la cuerda.

Aparejo Factorial

Este mecanismo se caracteriza por tener:

- *Una **una sola** correa enrollada en las poleas fijas y móviles.*
- ***Igual** número de poleas fijas que de poleas móviles.*

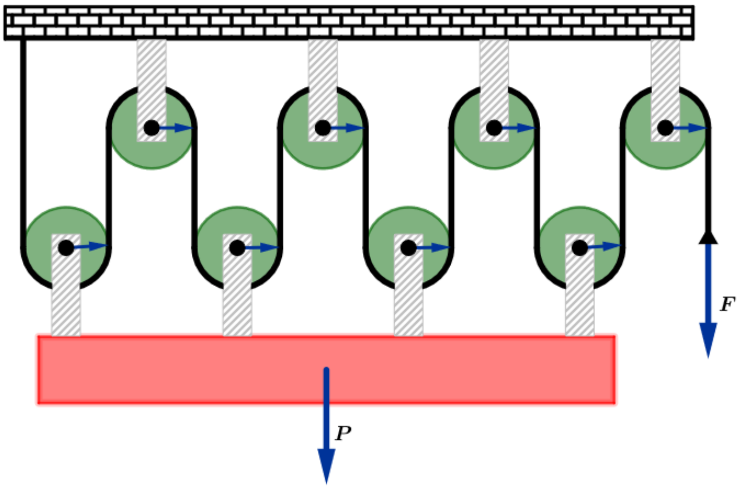


Figura 9

En la Figura 9, las cuatro poleas superiores son fijas y las inferiores móviles. El cuerpo a levantar está colgado de las últimas.
La fuerza aplicada será:

$$\boxed{F = \frac{P}{2n}}$$

Donde n es el número de poleas móviles. La cantidad de poleas móviles y fijas es la misma.

Ejemplo 21: *¿Cuál deberá ser la fuerza a aplicar para levantar el cuerpo de peso P de un aparejo con cuatro poleas móviles?*

De la condición de equilibrio, la fuerza aplicada será:

$$F = \frac{P}{2 \cdot 4} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F = \frac{P}{8}}}$$

Aparejo Potencial

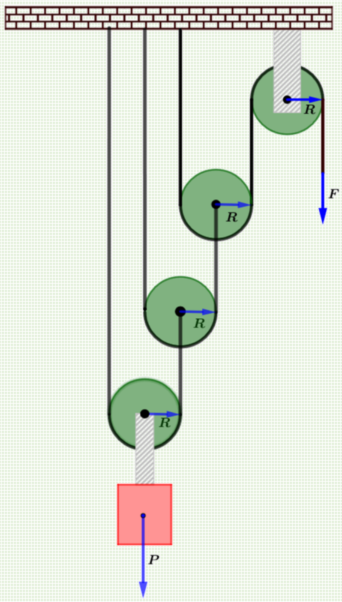
Este mecanismo se caracteriza por tener:

- ***Una*** *polea fija anclada a una cierta altura.*
- *Una o varias poleas móviles (en la última se sujeta el objeto a levantar).*
- *Tantas correas como poleas móviles haya.*

Cada polea móvil actúa de forma tal que, la fuerza que realizará la siguiente será la mitad que la realizada por la anterior. El peso del cuerpo se va dividiendo por 2 con cada polea móvil adicional, motivo por el cual se lo llama aparejo potencial. La fuerza aplicada será:

$$\boxed{F = \frac{P}{2^n}}$$

Ejemplo 22: *¿Cuál deberá ser la fuerza a aplicar para levantar, utilizando un aparejo potencial, un cuerpo cuyo peso es de* 24 N*?*



En la figura anterior, tenemos tres poleas móviles. La fuerza aplicada será:

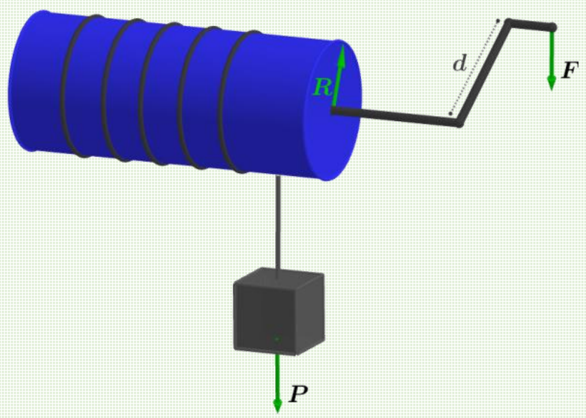
$$F = \frac{24\,N}{2^3} \implies \boxed{\boldsymbol{F = 3N}}$$

1.11.5. Torno

Este dispositivo consta de un cilindro que rota en torno a un eje mediante una manivela. El cilindro al girar permite que una cuerda, que sostiene en un extremo al cuerpo de peso P, se enrolle en torno a él. Este mecanismo es el típico que se usa en los aljibes para retirar baldes con agua.
También podemos asociar este mecanismo con la palanca. Con lo que la condición de equilibrio nos queda

$$F \cdot d = P \cdot R$$

Ejemplo 23: *Mediante un torno cuyo radio es de* $10\,cm$*, se debe levantar un balde cuyo peso es de* $20\,N$.



¿Cuál deberá ser el módulo de la fuerza aplicada si la manivela es de 50 cm?

Sabemos que

$$F \cdot d = P \cdot R$$

En nuestro caso

$$F \cdot 0{,}5\,m = 20\,N \cdot 0{,}1\,m \implies F = \frac{20\,N \cdot 0{,}1\,m}{0{,}5\,m} = \boxed{\boldsymbol{4N}}$$

Un caso particular de torno es el que está compuesto por dos cilindros unidos de diferente radio. En general, una correa o soga es enrollada en el cilindro de mayor diámetro, sobre la que se ejerce la fuerza. Y en el cilindro interior se enrolla la cuerda que sostiene el cuerpo a levantar.
Un ejemplo de esto es la persiana de enrollar.

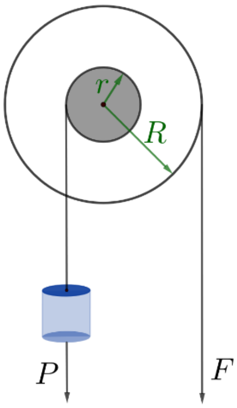


Figura 10

En este caso también

$$F \cdot R = P \cdot r \implies \boxed{F = \frac{P \cdot r}{R}}$$

Por lo que cuanto mayor sea el radio del cilindro exterior R con respecto al del cilindro interior r, menor será la fuerza a realizar.

Ejemplo 24: *Para levantar una persiana de enrollar se dispone de un motor que puede hacer una fuerza de* $20\ N$*, si la persiana pesa* $50\ N$*, ¿Cuál deberá ser el radio del cilindro exterior si el del cilindro interior es de* $0{,}05\ m$*?*

Tenemos:

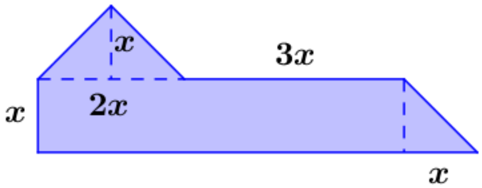
$$F = \frac{P \cdot r}{R} \implies R = \frac{P \cdot r}{F} = \frac{50\ N \cdot 0{,}05\ m}{20\ N} = \boxed{\mathbf{0,125\ m}}$$

1.12. Actividades del capítulo

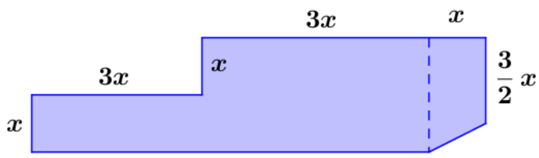
1. Exprese algebraicamente los enunciados:
   (a) Las tres quintas partes del cubo de un número.
   (b) El cubo del cuádruple de un número.
   (c) El triple de un número aumentado en 7.
   (d) El doble de un número, disminuido en 5.

2. Determine las expresiones algebraicas que representen el perímetro y el área las figuras:

   (a)



   (b)



3. Indique en cuáles se las siguientes expresiones se cumple la igualdad.
   (a) $(a-b)^2-(a-b)^4=4ab$
   (b) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$
   (c) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$
   (d) $(a+b)^3-(a-b)^2=8ab(a^2+b^2)$

4. Dados los polinomios
   $P_1(x)=-4x^3+2x^2-3x$ $P_2(x)=3x^3-4x^2+2x-1$ $P_3(x)=-x^3+x^2-1$
   Calcule el resultado en cada operación e indique cuál es su grado del polinomio obtenido.
   (a) $P_1+P_2-P_3$ (b) $P_2\cdot P_1+P_3$ (c) $(P_3+P_2)\cdot P_1$

5. Teniendo en cuenta el siguiente conjunto de polinomios,
   $$P_1(x)=x^2-2x+10 \quad P_2(x)=x^2+x+\frac{1}{4} \quad P_3(x)=x^2+4x+1$$
   $$P_4(x)=-2x^6+4x^3-3 \quad P_5(x)=x^2-4x+4 \quad P_6(x)=-4x^2-24x+1$$
   ¿Cuáles son trinomios cuadrados perfectos? En caso de no serlo, complete cuadrados y obtenga un polinomio equivalente.

6. Sean los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, realice la división de $P(x):Q(x)$. Indique los polinomios cociente y resto.
   (a) $P(x)=2x^4-2x^5-2x^2+5x-4$ $Q(x)=x^2-2x+4$
   (b) $P(x)=5x^3-3x^2+4$ $Q(x)=5x^2-5x+2$
   (c) $P(x)=6x^4+5x^3-2x^2-x$ $Q(x)=2x-1$

7. Calcule el cociente y el resto aplicando la regla de Ruffini

(a) $(3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 12x + 1):(x - 3)$ (b) $(5x^4 - 3x + 2x^2 - 82):(x - 2)$

(c) $\left(3x^3 - 12x^2 + 4x + \dfrac{1}{2}\right):\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$ (d) $(x^3 + 1):(x - 1)$

8. Sea $n \in \mathbb{R}$ y la operación,

$$(x^3 + 4nx^2 - n^2x + 4):(x - n)$$

Calcule el valor de n para que la división sea exacta.

9. Sean $P(x) = 2x^3 + kx - 2$ y $Q(x) = x - 2$. Determine el valor de k para que $Q(x)$ sea divisor exacto de $P(x)$.

10. Calcule los valores de a y b para $P(x)$ sea divisible por $Q(x)$.

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 + \mathrm{b}x + a \qquad Q(x) = x^2 + 1$$

11. Encuentre todos los ceros o raíces de los siguientes polinomios y utilícelos para escribirlo de forma factorizada.
(a) $P(x) = x^3 + x^2 - 14x - 24$
(b) $Q(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$
(c) $R(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{11}{2}x - 3$

12. Factorice el polinomio $P(x)$.

(a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ (b) $P(x) = x^2 - 81$

(c) $P(x) = x^6 + 2x^4 + x^2 - 2$ (d) $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 6x - 6$

(e) $P(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ (f) $P(x) = 12x^3 - 14x^2 + 42x - 49$

13. Determine el polinomio de tercer grado cuyos ceros son 2, -1 y 3. Además se sabe que el coeficiente del término cúbico es 5.

14. Encuentre un polinomio de cuarto grado cuyos ceros son 1, 2 (doble), 5 y $P(0) = 20$.

15. El resto o residuo de dividir el polinomio $P(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 8$ por $x + 3$ es 6. ¿Cuál es el residuo de dividir $P(x)$ por $x - 3$?

16. Verifique la igualdad efectuando las operaciones indicadas en el primer miembro, simplificando los resultados cuando sea posible.

(a) $\dfrac{6}{x}-\dfrac{9}{x^2}-1=-\dfrac{(x-3)^2}{x^2}$ (b) $\dfrac{-4{,}5}{x+1}-\dfrac{9}{x^2-1}-\dfrac{x^2-5}{x-1}=\dfrac{\frac{1}{2}-x^2}{x-1}$

(c) $\dfrac{3}{3x-3}-\dfrac{18}{9x^2-9x}=\dfrac{x+2}{x(x+1)}$ (d) $\dfrac{3x^3}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{6}{x^3-4x}=\dfrac{3(x-1)}{x(x-2)}$

17. Realice las operaciones, simplificando los resultados cuando sea posible

(a) $\dfrac{-x^2}{x^2+1}-\dfrac{x^4+1}{x^2-1}$ (b) $\dfrac{2x+6}{x^2-9}\cdot\dfrac{2x}{x+7}+\dfrac{x}{x+7}:\dfrac{x-3}{5}$

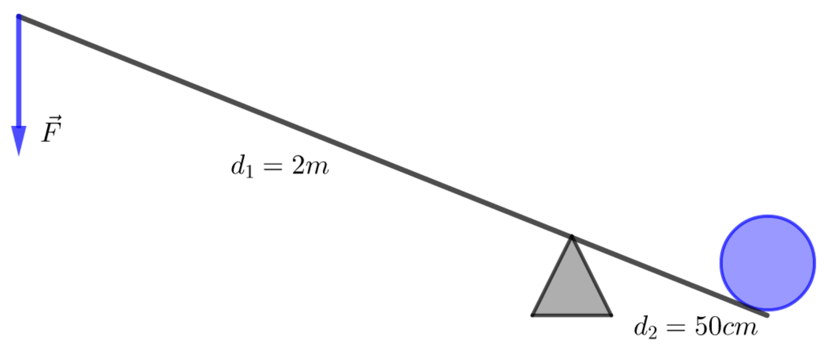
(c) $\dfrac{x^2-x-6}{x^3+x}:\dfrac{-x-2}{x^4-1}$ (d) $\left(\dfrac{2x^2+1}{3x^2}-\dfrac{2x+1}{4x^2-1}\cdot\dfrac{(2x-1)^2}{6x}\right):\dfrac{x^2+2x+1}{9x^3}$

18. Efectúen las operaciones necesarias en el primer miembro para verificar las igualdades.

(a) $\dfrac{\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{2}{x^2-6x+9}}{\dfrac{x-2}{x-3}}=\dfrac{x-1}{x-3}$ (b) $\left(\dfrac{x}{\frac{1}{x}}:\dfrac{x^2}{\frac{1}{x^2}}\right)+\left(\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}}\right)=\dfrac{x^5-x^4+1}{x^2}$

(c) $\dfrac{\dfrac{x^2+7x+6}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)}}{\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-1}}=\dfrac{x-1}{x+1}$ (d) $\dfrac{\dfrac{x-7}{x^2-4}}{\dfrac{x^2-14x+49}{x+4}}-\dfrac{x+4}{\dfrac{x^2-16}{4}}=\dfrac{29-4x}{(x-4)(x-7)}$

19. Un trabajador necesita levantar un objeto que pesa $500\,N$ con una palanca cuyo brazo de palanca mide $2\,m$, y el de resistencia $50\,cm$ según el siguiente esquema, ¿Qué fuerza necesita aplicar para mover el objeto?

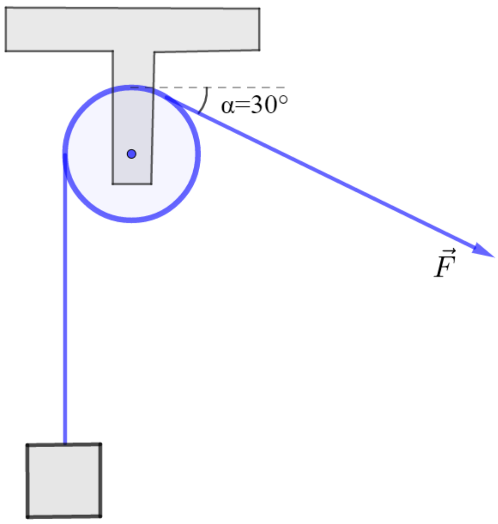


20. Necesitamos mover un cuerpo de $60\,kg$ de masa, con una palanca, calcular la posición del punto de apoyo, si la longitud total de la palanca es de $4\,m$ y la fuerza a aplicar es de $200\,N$.

21. ¿Cuál deberá ser la longitud de una carretilla, si al aplicarle una fuerza de 20 N levanta una carga de 50 N de materiales y la carga se considera concentrada a 0,20 m del extremo?

22. ¿Qué fuerza deberemos realizar en un destapador de botellas si el brazo de palanca mide 10 cm y la fuerza necesaria para destapar la botella es de 5 N y estará aplicada a 1,5 cm del extremo?

23. ¿Qué fuerza deberemos aplicar en el brazo de la polea fija del siguiente esquema si se desea levantar un peso de 100 N?



24. ¿Qué fuerza se deberá aplicar para levantar un cuerpo de 50 kg de masa con una polea móvil?

25. ¿Qué fuerza se deberá aplicar para levantar un peso de 1000 N, si cuento con un aparejo factorial de 5 poleas?

26. Si necesito levantar un cuerpo de masa 200 kg, y puedo aplicar una fuerza de 200 N, ¿cuántas poleas deberá tener el aparejo factorial a utilizar para poder levantar ese cuerpo?

27. ¿Qué fuerza necesito aplicar en un aparejo potencial de 3 poleas, si debo levantar un objeto que pesa 1600 N?

28. Deseo levantar una persiana de enrollar, si el peso de la persiana es de 100 N, el cilindro donde se enrolla la persiana tiene un radio de 5 cm y la cinta se enrolla en un cilindro con un radio de 15 cm, ¿cuál deberá ser la fuerza a aplicar para levantar la persiana?

29. Para sacar agua de un pozo se utiliza un torno, el cilindro del torno tiene un radio de $6\,cm$, y la manivela mide $20\,cm$. Si el peso del balde es de $200\,N$, ¿qué fuerza se deberá aplicar para retirar el balde del pozo?

30. Si deseo levantar un peso de $500\,N$ mediante un torno, y puedo aplicar una fuerza de $25\,N$, ¿cuál deberá ser la longitud de la manivela, si el cilindro mide $10\,cm$ de radio?

2. Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones lineales

2.1. Introducción

Se conoce de Diofanto de Alejandría algunos escritos en los cuales, por primera vez en la historia de la matemática griega, se tratan de una forma rigurosa las ecuaciones de primer grado. Introdujo también un simbolismo algebraico muy elemental al designar la incógnita con un signo que es la primera sílaba de la palabra griega *arithmos*, que significa número. Los problemas de álgebra que propuso prepararon el terreno de lo que siglos más tarde sería "la teoría de ecuaciones". A pesar de su rudimentaria notación simbólica, que no es la que actualmente se utiliza, fue muy importante su contribución en el campo de la notación.
Diofanto es considerado por muchos el padre del Álgebra, aunque se conoce poco sobre su vida, por ejemplo, en qué fecha murió. Pero un dato curioso es que sí se sabe la edad de su muerte, gracias al epitafio[2] redactado en forma de problema:

---

[2]*Un* ***epitafio*** *es el texto que honra al difunto, normalmente inscrito en una lápida sobre su tumba. Se han conocido muchos poetas que han escrito su propio epitafio en forma de verso.*

*"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida. Su niñez ocupó **la sexta parte de su vida**; después, durante **la doceava parte**, de vello se cubrieron sus mejillas. Pasó aún **una séptima parte de su vida** antes de tomar esposa y, **cinco años después**, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada **la mitad de la edad de su padre**, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante **cuatro años más**."*

Para determinar cuántos años vivió Diofanto podríamos pasar el epitafio a lenguaje matemático. Sabemos que es un número, pero desconocido, que llamaremos incógnita y representaremos con una letra. Si $\boldsymbol{x}$ es la ***cantidad de años que vivió Diofanto*** entonces,

Lenguaje coloquial	**Lenguaje matemático**
La sexta parte de su vida.	$\frac{1}{6}\boldsymbol{x}$
La doceava parte (de su vida).	$\frac{1}{12}\boldsymbol{x}$
Una séptima parte de su vida.	$\frac{1}{7}\boldsymbol{x}$
Cinco años después.	$+5$
La mitad de la edad de su padre, 4 años más.	$\frac{1}{2}\boldsymbol{x}+4$

Ahora sí podemos reescribir el epitafio, pero en lenguaje algebraico:

$$\frac{1}{6}\boldsymbol{x}+\frac{1}{12}\boldsymbol{x}+\frac{1}{7}\boldsymbol{x}+5+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}+4=\boldsymbol{x}$$

La expresión de arriba es una ecuación: "*igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparece al menos un valor desconocido llamado incógnita*". Resolver una ecuación significa encontrar el valor de esta incógnita, es decir, un número real (o varios) que hacen verdadera la igualdad.

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+\frac{1}{2}x-x=-5-4$$
$$-\frac{9}{84}x=-9$$

$$x = -9 \cdot \left(-\frac{84}{9}\right)$$

$$\boxed{x = 84}$$

¡Diofanto falleció a los 84 años!
Las ecuaciones pueden no tener solución, tener única solución, varias o incluso infinitas. Todo dependerá de las características de las mismas.
Por ejemplo, la ecuación que acabamos de resolver tiene una *única solución*.
A lo largo de este capítulo estudiaremos diversos tipos de ecuaciones, algunas de sus aplicaciones y características principales.

2.2. Ecuaciones

2.2.1. Ecuaciones de primer grado

En general una ecuación de primer grado, también llamada ecuación lineal en una variable, como la que resolvimos en el ejemplo anterior, es toda expresión de la forma:

$$\overbrace{\boldsymbol{ax+b}}^{1^\circ\, miembro} = \overbrace{\quad\boldsymbol{0}\quad}^{2^\circ\, miembro}$$

Término independiente

Término lineal

donde $a, b \in \mathbb{R}$

Ejemplo 1: *Indicar cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales. Justificar.*
(a) $-6x = 5$
(b) $2x^2 = x$
(c) $xy + 2 = 2x$
(d) $\frac{1}{x} + 5 = x$

Para determinar si una ecuación es o no lineal basta con verificar que la misma pueda escribirse de la forma $ax + b = 0$. Analicemos a continuación cada caso.

Ecuación	¿Es lineal?	Justificación
$-6x = 5$	Sí	La ecuación puede expresarse de la forma $-6x - 5 = 0$
$2x^2 = x$	No	En este caso, no es posible expresar la ecuación de la forma $ax + b$ debido a que tenemos un término donde la incógnita de la ecuación está elevada al cuadrado.
$xy + 2 = 2x$	No	Tampoco es una ecuación lineal ya que aparece un término donde **dos incógnitas se** multiplican entre sí.
$\frac{1}{x} + 5 = x$	No	En este caso, la expresión equivalente a la dada es $x^{-1} + 5 - x = 0$. Tampoco es lineal.

Ejemplo 2: *Verificar que las siguientes expresiones son ecuaciones lineales y hallar el conjunto solución:*

(a)

$$2x + \frac{1}{4} - 4x = -3$$

Si queremos comprobar que se trata de una ecuación lineal, solo debemos expresarla en la forma $ax + b = 0$,

$$2x + \frac{1}{4} - 4x = -3$$
$$2x + \frac{1}{4} - 4x + 3 = 0$$
$$-2x + \frac{13}{4} = 0$$

-2 es el coeficiente que acompaña al término lineal y $\frac{13}{4}$ es el término independiente. Para resolver dicha ecuación bastará con despejar la incógnita.

$$x = -\frac{13}{4} : (-2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{8}}}$$

Insistiremos a lo largo de este capítulo con el proceso de verificación, porque consideramos que es tan importante como el de resolución. Para esto solo será necesario remplazar el valor hallado en la "ecuación original" y verificar que se cumple la igualdad.

Verificación:

$$2\left(\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{8}}\right)+\frac{1}{4}-4\left(\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{8}}\right)=\frac{26}{8}+\frac{1}{4}-\frac{52}{8}=-\frac{24}{8}=-3 \quad \checkmark$$

Ahora podemos escribir el conjunto solución de nuestra ecuación, que tendrá un único elemento:

$$\boxed{\mathbf{S}=\left\{\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{8}}\right\}}$$

(b)

$$\frac{6}{5}x+4+\frac{4}{5}x=2x$$

Comprobemos nuevamente que se trata de una ecuación lineal:

$$\begin{aligned} \frac{6}{5}x+4+\frac{4}{5}x&=2x \\ \frac{6}{5}x+\frac{4}{5}x-2x+4&=0 \\ 0x+4&=0 \end{aligned}$$

Sin embargo, observemos que el coeficiente del término lineal es cero y 4 es el término independiente. En esta ecuación es imposible despejar la incógnita debido a que la división por cero <u>no está definida</u>. Pero, además, no existe ningún número real que multiplicado por cero nos de -4. En este caso la ecuación no tiene solución y el conjunto solución es vacío.

$$\boxed{\mathbf{S}=\emptyset}$$

(c)

$$4+x-9+6x=-5+7x$$

Para la última ecuación tenemos que

$$x + 6x - 7x + 4 - 9 + 5 = 0$$
$$0x + 0 = 0$$

Observemos que en este caso tanto el coeficiente lineal como el término independiente son ceros. Pero la situación es muy distinta a la planteada en el ejemplo anterior, analicemos algunos posibles valores para x:

$$0 \cdot \mathbf{3} + 0 = 0$$
$$0 \cdot \mathbf{8} + 0 = 0$$
$$0 \cdot (\mathbf{-9}) + 0 = 0$$

Es decir, la ecuación planteada tiene *infinitas soluciones* ya que todo número real la verifica. Podemos escribir en forma genérica

$$\boxed{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}}$$

El conjunto solución se puede expresar también

$$\boxed{\mathbf{S} = \{\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\}}$$

Que se lee: "El conjunto solución está formado por todos los valores posibles de x tales que x pertenezca al conjunto de los números reales".

¿Es posible encontrar una ecuación lineal cuyo conjunto solución tenga exactamente tres elementos?
¿y exactamente dos?

La respuesta es no, una ecuación lineal solo puede tener **exactamente una**, **ninguna** o **infinitas** soluciones, como sintetizaremos en la siguiente tabla:

$\boldsymbol{ax + b = 0}$		
Única solución	**Infinitas soluciones**	**Ninguna solución**
Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$	*Si* $a = 0$ y $b = 0$	*Si* $a = 0$ y $b \neq 0$
$\boldsymbol{x = \frac{b}{a}}$	$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$	$\nexists \boldsymbol{x}$

2.2.2. Ecuaciones de segundo grado

De forma análoga y casi intuitiva podemos decir que una ecuación de segundo grado, también llamada ecuación cuadrática en una variable, es toda igualdad de la forma:

$$\overbrace{\boldsymbol{ax^2 + bx + c}}^{1^\circ\, miembro} = \overbrace{\quad\boldsymbol{0}\quad}^{2^\circ\, miembro}$$

Término independiente

Término lineal

Término cuadrático

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ se llaman coeficientes de la ecuación.

Las soluciones de una ecuación cuadrática con $a \neq 0$, pueden obtenerse a partir de los coeficientes a, b, c como demostraremos a continuación.
Tomemos la ecuación cuadrática genérica

$$a^2 + bx + c = 0$$

y despejemos el término independiente

$$a^2 + bx \ = -c$$

Multiplicamos ambos miembros por $4a$

$$4a^2\, x^2 + 4abx = -4ac$$

Si sumamos b^2 en ambos miembros, para obtener un trinomio cuadrado perfecto,

$$4a^2x^2 + 4abx \ + \ \boldsymbol{b^2} \ = -4ac \ + \ \boldsymbol{b^2}$$

podemos escribir en el primer miembro, como el cuadrado de un binomio

$$(2ax + b)^2 = -4ac \ + \ b^2$$

Aplicamos raíz cuadrada en ambos miembros

$$|2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Por la definición de valor absoluto, esta expresión es equivalente a

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Despejando

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

llegamos finalmente a

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

La expresión obtenida para $x_{1,2}$ se llama ***fórmula resolvente.***

Ejemplo 3: *Hallar el valor de la incógnita en las siguientes ecuaciones cuadráticas y dar el conjunto solución:*

(a)

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - x = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{2}$$

Si queremos comprobar que se trata de una ecuación cuadrática, solo debemos llevarla a la forma $ax^2 + bx + c = 0$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - x = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{2}$$
$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4 = 0$$

$a = -\frac{2}{3}$ es el coeficiente del término cuadrático, $b = \frac{2}{3}$ es el coeficiente del término lineal y $c = 4$ es el término independiente. Para resolver dicha ecuación, bastará con utilizar la fórmula resolvente

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 4}}{2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{32}{3}}}{-\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9}}}{-\frac{4}{3}}$$

$$x_1=\frac{-\frac{2}{3}+\frac{10}{3}}{-\frac{4}{3}}=\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\boxed{\mathbf{-2}}\qquad x_2=\frac{-\frac{2}{3}-\frac{10}{3}}{-\frac{4}{3}}=-\frac{12}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\boxed{\mathbf{3}}$$

Como hemos señalado anteriormente, es de suma importancia, verificar los valores hallados en la ecuación original.

Verificación:

Para $\boldsymbol{x_1}=\mathbf{-2}$:

$$-\frac{2}{3}(\mathbf{-2})^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(\mathbf{-2})-(\mathbf{-2})=-\frac{4}{3}(\mathbf{-2})-\frac{7}{2}$$
$$-\frac{2}{3}4+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}-\frac{7}{2}$$
$$-\frac{8}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}-\frac{7}{2}$$
$$-\frac{5}{6}=-\frac{5}{6}\quad\checkmark$$

Para $\boldsymbol{x_2}=\mathbf{3}$:

$$-\frac{2}{3}(\mathbf{3})^2+\frac{1}{2}+(\mathbf{3})-(\mathbf{3})=-\frac{4}{3}(\mathbf{3})-\frac{7}{2}$$
$$-\frac{2}{3}9+\frac{1}{2}+1-3=-4-\frac{7}{2}$$
$$-6+\frac{1}{2}+1-3=-4-\frac{7}{2}$$
$$-\frac{15}{2}=-\frac{15}{2}\quad\checkmark$$

El conjunto solución de nuestra ecuación tendrá dos elementos,

$$\boxed{\boldsymbol{S}=\{\mathbf{-2;3}\}}$$

(b)

$$-\frac{5}{2}x-4-\frac{3}{2}x+2x^2=x^2+4x+12$$

$$-\frac{5}{2}x-4-\frac{3}{2}x+2x^2-x^2+4x-12=0$$
$$x^2+0x-16=0$$

$a=1$ es el coeficiente del término cuadrático, $b=0$ es el coeficiente del término lineal y $c=16$ es el término independiente. Para resolver dicha ecuación podríamos utilizar la fórmula resolvente o despejar la incógnita directamente, alternativa que tendremos siempre que el término lineal sea cero:

$$x^2 + 0x - 16 = 0$$
$$x^2 = 16$$

Aplicamos raíz cuadrada en ambos miembros,

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

y recordando que $\boldsymbol{\sqrt{x^2} = |x|}$,

$$|x| = \sqrt{16} \quad \Longrightarrow \quad |x| = 4$$

Recordemos que el valor absoluto de un número real es la distancia a la que ese número real se encuentra del cero. Como hay dos números reales que están a cuatro unidades del cero, las respuestas serán:

$$\boxed{\boldsymbol{x_1 = 4 \quad x_2 = -4}}$$

Como hemos señalado anteriormente, es de suma importancia, verificar los valores hallados en la ecuación original.

Verificación:

Para $\boldsymbol{x_1 = 4}$:

$$-\frac{5}{2} \cdot (\mathbf{4}) - 4 - \frac{3}{2} \cdot (\mathbf{4}) + 2 \cdot (\mathbf{4})^2 = (\mathbf{4})^2 - 4 \cdot (\mathbf{4}) + 12$$
$$-10 - 4 - 6 + 32 = 16 - 16 + 12$$
$$12 = 12 \quad \checkmark$$

Para $\boldsymbol{x_2 = -4}$:

$$-\frac{5}{2} \cdot (\mathbf{-4}) - 4 - \frac{3}{2} \cdot (\mathbf{-4}) + 2 \cdot (\mathbf{-4})^2 = (\mathbf{-4})^2 - 4 \cdot (\mathbf{-4}) + 12$$
$$10 - 4 + 6 + 32 = 16 + 16 + 12$$
$$44 = 44 \quad \checkmark$$

Ahora podemos escribir el conjunto solución de nuestra ecuación, que tendrá dos elementos:

$$\boxed{\boldsymbol{S = \{4; -4\}}}$$

(c)

$$2x^2 + 5 + 11x - 9 + 2x = x^2 + 8x - 6 + 3x$$

Agrupando en el primer miembro

$$2x^2 + 5 + 11x - 9 + 2x - x^2 - 8x + 6 - 3x = 0$$
$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$a = 1$ es el coeficiente del término cuadrático, $b = 2$ es el coeficiente del término lineal y $c = 2$ es el término independiente. Para resolver dicha ecuación, deberemos utilizar nuevamente la fórmula resolvente.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Como la $\sqrt{-4}$ no tiene solución en el conjunto de los números reales, la ecuación planteada **no tiene solución** en este conjunto. En otras palabras, el conjunto solución es vacío:

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \emptyset}$$

Una ecuación cuadrática, *en el conjunto de los números reales*, puede tener **una**, **dos** o **ninguna** solución. El discriminante, que se denota Δ y se obtiene mediante la expresión,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

es el que nos indica la cantidad de soluciones que tendrá, según sea positivo, negativo o cero. En la siguiente tabla analizamos cada caso.

$ax^2 + bx + c = 0$		
Única solución	**Dos soluciones**	**Ninguna solución**
$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
$x = \frac{-b}{2a}$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$\nexists x$

¿Cuál es el valor del discriminante en cada una de las ecuaciones del Ejemplo 3?

2.2.3. Ecuaciones bicuadráticas

Este tipo de ecuaciones son un caso particular de las ecuaciones de cuarto grado, en las que faltan los términos de tercer y primer grado. Es decir, son de la forma,

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Para poder resolverlas necesitamos hacer el siguiente cambio de variable,

$$x^2 = u$$

De esta manera, la ecuación original nos queda nuevamente de segundo grado,

$$au^2 + bu + c = 0$$

y podemos aplicar la fórmula resolvente,

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Al deshacer el cambio de variable, encontraremos las cuatro soluciones posibles:

$$\boxed{x_{1,2} = \pm\sqrt{u_1}} \quad \boxed{x_{3,4} = \pm\sqrt{u_2}}$$

Ejemplo 4: *Hallar todos los valores de x que verifican la siguiente ecuación,*

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Como se trata de una ecuación bicuadrática, realizamos el cambio de variable,

$$x^2 = u$$

Obtenemos así,

$$u^2 - 13u + 36 = 0$$

Aplicamos la fórmula resolvente,

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

Hemos encontrado, dos valores posibles para u: $u_1 = 9$ y $u_2 = 4$. Sin embargo, no podemos olvidar que la incógnita de nuestro problema es x. Entonces,

$$\boxed{x_{1,2} = \pm\sqrt{9}} \quad \boxed{x_{3,4} = \pm\sqrt{4}}$$

Es decir, existen cuatro valores de x que verifican la ecuación.

Verificación:

Para $\boldsymbol{x_1} = \mathbf{3}$:

$$(3)^4 - 13 \cdot (3)^2 + 36 = 0$$
$$81 - 13 \cdot 9 + 36 = 0$$
$$117 - 117 = 0 \quad \checkmark$$

Para $\boldsymbol{x_2} = \mathbf{-3}$:

$$(-3)^4 - 13 \cdot (-3)^2 + 36 = 0$$
$$81 - 13 \cdot 9 + 36 = 0$$
$$117 - 117 = 0 \quad \checkmark$$

Para $\boldsymbol{x_3} = \mathbf{2}$:

$$(2)^4 - 13 \cdot (2)^2 + 36 = 0$$
$$16 - 13 \cdot 4 + 36 = 0$$
$$52 - 52 = 0 \quad \checkmark$$

Para $\boldsymbol{x_4} = \mathbf{-2}$:

$$(\mathbf{-2})^4 - 13 \cdot (\mathbf{-2})^2 + 36 = 0$$
$$16 - 13 \cdot 4 + 36 = 0$$
$$52 - 52 = 0 \quad ✔$$

Ahora podemos escribir el conjunto solución de nuestra ecuación, que tendrá cuatro elementos:

$$\boxed{\mathbf{S = \{3; -3; 2; -2\}}}$$

2.2.4. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Antes de comenzar a desarrollar la idea de ecuación exponencial y logarítmica, repasemos algunos conceptos previos necesarios.

Logaritmo de un número real

Los logaritmos son otra manera de pensar en potencias. Veamos esto a través del siguiente ejemplo.
Sabemos que 3 elevado a la cuarta es igual a 81 y podemos representar esta relación a través de la siguiente expresión:

$$3^4 = 81$$

Y si nos preguntan: *¿3 elevado a qué potencia es igual a 81?* la respuesta obviamente es 4, pero lo interesante es el hecho de que también existe una expresión para esta operación:

$$\log_3 81 = 4$$

y se lee: *"El logaritmo en base tres de ochenta y uno, es cuatro"*.
Ambas expresiones son formas equivalentes de expresar la relación que existe entre los tres números. En otras palabras, una es recíproca de la otra:

$$\log_3 81 = 4 \iff 3^4 = 81$$

Veamos más ejemplos de esta relación, en el siguiente cuadro.

Expresión logarítmica	Expresión exponencial
$\log_2 32 = 5$	$2^5 = 32$
$\log_{10} 1000 = 3$	$10^3 = 1000$
$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
$\log_8 1 = 0$	$8^0 = 1$

De los ejemplos exhibidos anteriormente podemos definir de forma genérica que,

El logaritmo en base a de un número real positivo es el exponente al cual hay que elevar a la base para obtener dicho número. Simbólicamente,

$$log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

donde $a > 0$, $a \neq 1$ es la base del logaritmo y $b > 0$ es el argumento.

¿Existe el $log_2(-8)$? Justifica tu respuesta

Logaritmos especiales

Aunque la base de un logaritmo puede ser cualquier número real positivo (pero distinto de uno), hay dos bases que se utilizan más que las demás. Incluso las calculadoras tienen teclas específicas para estos dos tipos de logaritmos. Por este motivo tienen una forma particular de denotarse:

- *El logaritmo en **base 10** es el único que, al escribirlo podemos omitir su escritura. Es decir,*

$$\log_{10} x = \mathbf{log}\ \boldsymbol{x}$$

- *El logaritmo natural (o neperiano) es el logaritmo cuya base es el número irracional e. En este caso escribiremos "ln" en lugar de "log".*

$$\log_e x = \mathbf{ln}\,\boldsymbol{x}$$

Logaritmos con calculadora. Cambio de base

Supongamos que queremos encontrar el valor de la expresión $\log_2 30$, Como 30 no es una potencia racional de 2, es difícil evaluar esta expresión sin una calculadora. Sin embargo, algunas solo permiten calcular directamente logaritmos en ***base 10*** o ***base e***. Esto está lejos de ser una limitación, ya que es posible resolver el logaritmo planteado realizando un *cambio de base* a cualquiera de estas dos. Por ejemplo, podríamos pasarlo a ***base 10*** y obtener el resultado (con calculadora) a través del siguiente cálculo,

$$\log_2 30 = \frac{\log\ 30}{\log\ 2} \cong 4{,}9$$

Incluso utilizando ***base e*** podemos verificar (con calculadora) que también llegamos al mismo valor,

$$\log_2 30 = \frac{\ln 30}{\ln 2} \cong 4{,}9$$

Cabe aclarar que podemos utilizar cualquier base para realizar el cálculo. En general, la expresión para el **cambio de base** está dada por:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Propiedades de los logaritmos

i. El *logaritmo de uno*, en cualquier base, es siempre cero.

$$\log_a 1 = 0$$

ii. El *logaritmo de un producto* es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

iii. El *logaritmo de un cociente* es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

iv. El *logaritmo de una potencia* es igual al producto entre el exponente y el logaritmo de la base.

$$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a b$$

Ejemplo 5: *Utilizando propiedades y sin calculadora, reducir las siguientes expresiones a un único logaritmo y resolver.*

(a)

$$log_4 12 - log_4 6 + log_4 8 =$$

Aplicando la propiedad iii. (logaritmo del cociente) podemos expresar los dos primeros logaritmos como uno solo donde los argumentos quedan dividiendo:

$$= log_4\left(\frac{12}{6}\right) + log_4 8 = log_4 2 + log_4 8 =$$

Aplicando la propiedad ii. (logaritmo del producto) podemos expresar los dos logaritmos como uno solo, donde los argumentos quedan multiplicando:

$$= \log_4(2 \cdot 8) = \log_4 16 = \boxed{\mathbf{2}}$$

(b)

$$2 \cdot log_2 10 - 2 \cdot log_2 5 =$$

Aplicando la propiedad iv. (logaritmo de una potencia) podemos colocar los factores que los multiplican, como exponentes de sus argumentos, respectivamente:

$$= \log_2 10^2 - \log_2 5^2 = \log_2 100 - \log_2 25 =$$

Aplicamos la propiedad iii. (logaritmo del cociente):

$$= \log_2\left(\frac{100}{25}\right) = \log_2 4 = \boxed{\mathbf{2}}$$

(c)

$$log_3 162 - \frac{1}{2} \cdot log_3 36 =$$

Aplicando la propiedad iv. (logaritmo de una potencia) podemos colocar el factor del segundo logaritmo como exponente del argumento:

$$= \log_3 162 - \log_3 \left(36^{\frac{1}{2}}\right) = \log_3 162 - \log_3 \sqrt{36} = \log_3 162 - \log_3 6$$

Aplicamos la propiedad iii. (logaritmo del cociente):

$$= \log_3 \left(\frac{162}{6}\right) = \log_3 27 = \boxed{\mathbf{3}}$$

Ahora sí contamos con una serie de recursos que podemos utilizar para abordar otro tipo de ecuaciones.
En una ***ecuación exponencial***, la incógnita se encuentra en el exponente de algún término. Mientras que en una ***ecuación logarítmica*** la incógnita se encuentra en el argumento del logaritmo. Para resolver dichas ecuaciones se recurre a las propiedades arriba utilizadas. Algunos ejemplos de estas ecuaciones son:

(a) $log(3x + 1) - log(2x - 3) = -4$
(b) $log(x^3 + 1) - log(3x - 8) = 1$
(c) $5 \cdot 34^x - 1 = 5$
(d) $5^{x+1} + 5^{x-1} = 26$

(a) y (b) son ecuaciones logarítmicas mientras que (c) y (d) son ecuaciones exponenciales.

Ejemplo 6: *Hallar el o los valores de la incógnita, en las siguientes ecuaciones exponenciales:*

(a)
$8^x \cdot 16^{3x} = 32$

Aplicando logaritmo en ambos miembros, por las propiedades i y iv, podemos "bajar" los exponentes. Si bien es posible aplicar logaritmo en cualquier base, al observar el ejercicio podemos notar que 8, 16 y 32 son potencias de 2. Entonces nos conviene aplicar logaritmo en base 2 y nos evitamos así tener que usar calculadora para obtener los logaritmos. Recordemos que al tratarse de una igualdad debemos aplicar la misma operación en ambos miembros,

$$\log_2(8^x \cdot 16^{3x}) = \log_2 32$$

La propiedad i dice que el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores, entonces,

$$\log_2(8^{x}) + \log_2(16^{3x}) = \log_2 32$$

La propiedad iv afirma

que el logaritmo de una potencia es igual al producto entre el exponente y el logaritmo de la base de la potencia. Entonces,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \log_2 8 + \boldsymbol{3x} \cdot \log_2 16 &= \log_2 32 \\ x \cdot 3 + 3x \cdot 4 &= 5 \\ 3x + 12x &= 5 \\ 15x &= 5 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}}$$

(b)

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} = -27$$

Esta ecuación puede parecer similar en su resolución a la anterior, pero no lo es. Observemos que tenemos una resta y no un producto. Entonces no podemos aplicar todavía ninguna propiedad de los logaritmos. Sin embargo, sí podemos aplicar propiedades de la potencia:

$$\begin{aligned} (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x \cdot 3^1 &= -27 \\ (3^x)^2 - 12 \cdot 3^x &= -27 \\ (\boldsymbol{3^x})^2 - 12 \cdot \boldsymbol{3^x} + 27 &= 0 \end{aligned}$$

Observemos que si sustituimos $\boxed{\boldsymbol{y = 3^x}}$ nos queda una ecuación cuadrática o de segundo grado:

$$\boldsymbol{y}^2 - 12 \cdot \boldsymbol{y} + 27 = 0$$

Aplicando la fórmula resolvente obtenemos,

$$y_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$y_1 = \frac{12 + 6}{2} = \mathbf{9} \qquad ; \qquad y_2 = \frac{12 - 6}{2} = \mathbf{3}$$

Es importante tener en cuenta que todavía no encontramos los valores de x, pero al tener la relación que establecimos entre x e y, a través de la sustitución $\boldsymbol{y = 3^x}$

$$\overbrace{9 = 3^x \qquad \text{o} \qquad 3 = 3^x}^{y = 3^x}$$

Aplicando, ahora sí, logaritmo en ambos miembros podemos "bajar" aplicando la propiedad *iv*.

$$\begin{aligned} \log_3 9 &= \log_3(3^x) \\ \log_3 9 &= x \cdot \log_3 3 \\ 2 &= x \cdot 1 \\ &\boxed{\boldsymbol{x = 2}} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \log_3 3 &= \log_3(3^x) \\ \log_3 3 &= x \cdot \log_3 3 \\ 1 &= x \cdot 1 \\ &\boxed{\boldsymbol{x = 1}} \end{aligned}$$

Ejemplo 7: *Hallar el o los valores de la incógnita, en las siguientes ecuaciones logarítmicas:*

(a)

$$log_9(x + 1) + log_9 9 \cdot (x + 1) = 2$$

Aplicamos la propiedad i de los logaritmos,

$$\log_9[(x + 1) \cdot 9(x + 1)] = 2$$
$$\log_{\mathbf{9}}[9(x + 1)^2] = \mathbf{2}$$

Teniendo en cuenta la definición de logaritmo,

$$\mathbf{9^2} = 9(x + 1)^2$$
$$9 = (x + 1)^2$$

Aplicando raíz cuadrada en ambos miembros, obtenemos

$$\sqrt{(x + 1)^2} = \sqrt{9}$$

Recordemos nuevamente que $\boldsymbol{\sqrt{x^2} = |x|}$

$$|x + 1| = \sqrt{9}$$

$$|x+1| = 3$$

$$x+1=3 \qquad\qquad x+1=-3$$

$$\boxed{\boldsymbol{x=2}} \qquad\qquad \boxed{\boldsymbol{x=-4}}$$

(b)

$$2 \cdot log^2 x - 18 \cdot log\, x = 20$$

Observemos que si sustituimos $\boldsymbol{y = \log x}$ la ecuación que nos queda es otra vez una cuadrática:

$$2\boldsymbol{y}^2 - 18\boldsymbol{y} - 20 = 0$$

Si multiplicamos ambos miembros por $\frac{1}{2}$:

$$y^2 - 9y - 10 = 0$$

Aplicando la fórmula resolvente obtenemos,

$$y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{81+40}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{2}$$

$$y_1 = \frac{9+11}{2} = 10 \qquad \text{o} \qquad y_2 = \frac{9-11}{2} = -1$$

Para obtener los valores de x, debemos utilizar la relación que establecimos entre x e y, a través de la sustitución $\boldsymbol{y = \log x}$ y aplicar la definición de logaritmo:

$$y = \log x$$

$$10 = \log x \qquad\qquad -1 = \log x$$

$$x = 10^{10} \qquad\qquad x = 10^{-1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = 10^{10}}} \qquad\qquad \boxed{\boldsymbol{x = \frac{1}{10}}}$$

Verificar en las ecuaciones originales los valores hallados.

2.2.5. Ecuaciones racionales

Las ***ecuaciones racionales***, también llamadas ***ecuaciones fraccionarias***, son aquellas que contienen cocientes de expresiones algebraicas y la incógnita aparece en el denominador. Por tal motivo, lo primero que debemos pensar es que, al haber *cocientes,* la incógnita x podría tomar valores que hagan cero al denominador. Pero, la división por cero **¡no está definida**! entonces, lo primero será analizar qué valor o valores debemos restringir como posibles soluciones y obtener así el conjunto de validez de estos cocientes, que denotaremos $\boldsymbol{C_v}$.

Ejemplo 8: *Hallar todos los valores de* $\boldsymbol{x}$ *que satisfagan las siguientes ecuaciones:*

(a)

$$\frac{2x-5}{x-5}=\frac{15}{x-5}$$

Lo primero que haremos será analizaremos qué valores debemos restringir.

$$x \neq 5$$

El conjunto de validez será:

$$C_v = \mathbb{R} - \{5\}$$

Podemos notar que en ambos miembros el denominador es el mismo, entonces para que la igualdad se cumpla también deberán ser iguales los numeradores, quedando entonces,

$$2x - 5 = 15$$
$$\boxed{\boldsymbol{x = 10}}$$

(b)

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$$

Al analizar qué valores de x anulan los denominadores de la ecuación, resulta,

$$x \neq 2 \quad y \quad x \neq -2$$

y el conjunto de validez es:

$$C_v = \mathbb{R} - \{2; -2\}$$

$$\frac{x+2+x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x^2-4}$$

Hallamos el $m.c.m$ de los denominadores y resolvemos la suma.

$$\frac{2x}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x^2-4}$$

Además $x^2-4= (x-2)(x+2)$

$$2x=1$$

Si el denominador de los dos miembros es igual, como ya dijimos, deben serlo también los numeradores.

$$\boxed{\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}}$$

(c)

$$\frac{x+2}{x+3}-\frac{3}{x^2+6x+9}=1$$

Analizando los dos denominadores, debemos excluir como posible solución:

$$x\neq -3$$

El conjunto de validez será:

$$C_v=\mathbb{R}-\{-3\}$$

$$\frac{x+2}{x+3}-\frac{3}{(x+3)^2}=1$$

Factorizamos el polinomio del denominador en el segundo término.

$$\frac{(x+2)(x+3)-3}{(x+3)^2}=1$$

Hallamos el $m.c.m$ de los denominadores y resolvemos la resta.

$$(x+2)(x+3)-3=(x+3)^2$$

Multiplicamos ambos miembros por $(x+3)^2$

$$x^2+5x+6-3=x^2+6x+9$$

Aplicamos propiedad distributiva en el primer miembro y desarrollamos el cuadrado en el segundo.

$$6-3-9=6x-5x$$

Simplificamos y agrupamos convenientemente.

$$\boxed{\boldsymbol{x=-6}}$$

(d)

$$\frac{x+5}{x^2-4}-\frac{x-4}{x^2+4x+4}=0$$

Analizando los dos denominadores, debemos excluir como posibles soluciones:

$$\boldsymbol{x \neq -2 \quad y \quad x \neq 2}$$

El conjunto de validez será:

$$\boldsymbol{C_v = \mathbb{R} - \{-2; 2\}}$$

$\frac{x+5}{(x+2)(x-2)}-\frac{x-4}{(x+2)^2}=0$	Factorizamos los dos denominadores.
$\frac{(x+5)(x+2)-(x-4)(x-2)}{(x-2)(x+2)^2}=0$	Hallamos el *m.c.m* de los denominadores y resolvemos la resta.
$\frac{x^2+2x+5x+10-(x^2-4x-2x+8)}{(x-2)(x+2)^2}=0$	Aplicamos distributiva en el numerador.
$x^2+2x+5x+10-x^2+4x+2x-8=0$	Multiplicamos ambos miembros por $(x-2)(x+2)^2$
$13x+2=0$	Agrupamos términos semejantes en el primer miembro.

$$\boxed{\boldsymbol{x = -\frac{2}{13}}}$$

-

¿Qué decisión deberemos tomar si al despejar la ecuación, hallamos como valor de la incógnita un número que se encuentra en el conjunto de validez?

2.2.6. Ecuación de una circunferencia

En el capítulo de Geometría definimos a la circunferencia como el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una misma distancia (que llamamos radio) de un punto fijo (que llamamos centro). A partir de esta definición podemos determinar, analíticamente, una ecuación que represente a todos los puntos que están sobre dicha circunferencia.

Para encontrar esta ecuación, consideremos primero una circunferencia genérica de radio $\boldsymbol{r}$ y con centro en el punto $C(\mathbf{0};\mathbf{0})$, es decir, centrada en el origen de coordenadas (Figura 1).

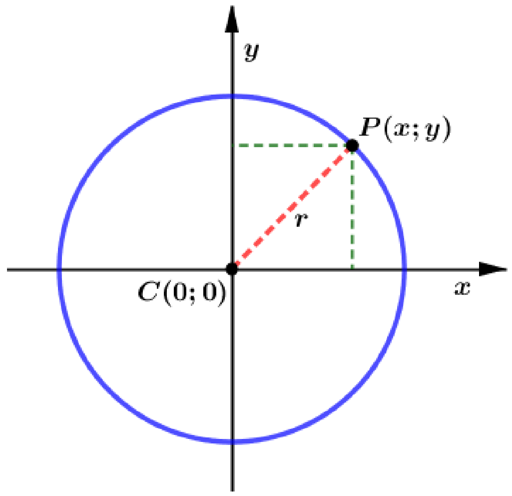


Figura 1

La distancia entre el punto C y el punto P debe ser igual al radio r. Es decir,

$$d(C;P) = r$$

Como la distancia es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo, aplicando Pitágoras,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

y elevando al cuadrado ambos miembros, llegamos finalmente a la ecuación buscada:

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}}$$

Sin embargo, podría ocurrir que la circunferencia tenga su centro en cualquier punto del plano y no necesariamente en el origen de coordenadas. Consideremos entonces un caso aún más genérico que el anterior (Figura 2), una circunferencia con radio $\boldsymbol{r}$ y centro en el punto $C(h;k)$:

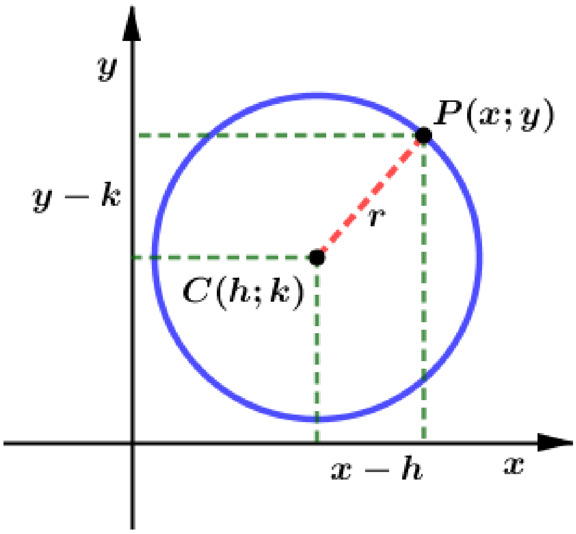


Figura 2

$$d(C; P) = r$$

La longitud de los catetos del triángulo rectángulo que quedó determinado, estará dada por la diferencia de las coordenadas homólogas de los puntos P y C. Aplicando nuevamente Pitágoras,

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

obtenemos la ecuación general de una circunferencia de radio $\boldsymbol{r}$ y centro $C(h; k)$,

$$\boxed{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2 + (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2 = \boldsymbol{r}^2}$$

¿Cuántos puntos como mínimo se necesitan para determinar una circunferencia?

Ejemplo 9: *Dada una circunferencia de ecuación:*

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$$

(a) Identificar centro y radio.

Aquí nos conviene completar cuadrados, ya que la ecuación no se parece a ninguna de las dos expresiones halladas.

Como son dos variables, deberemos completar cuadrados en las dos y de forma separada,

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12$$

$$(x^2 - 2\cdot 2x + \mathbf{2^2 - 2^2}) + (y^2 - 2\cdot 3y + \mathbf{3^2 - 3^2}) = 12$$
$$(x-2)^2 - 2^2 + (y-3)^2 - 3^2 = 12$$
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 12 + 4 + 9$$
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$\boldsymbol{(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2}$$

Se trata de una circunferencia con centro en el punto $(\mathbf{2};\mathbf{3})$ y radio $\mathbf{5}$.

(b) Indicar cuáles de los siguientes puntos pertenecen la circunferencia dada.

i. $P(2\,;1)$

ii. $Q(0\,;3)$

iii. $R\left(-2\,;\frac{1}{2}\right)$

Verificar si los puntos pertenecen a la circunferencia, equivale a ver que satifacen la ecuación hallada. Entonces, solo debemos remplazar en la ecuación y ver si se cumple o no la igualdad:

i. Para $P(2;1)$*:*

$$(\mathbf{2}-2)^2 + (\mathbf{1}-3)^2 = 0^2 + (-2)^2 = 4 \neq 25$$

entonces P **no** pertenece a la circunferencia.

ii. Para $Q(0;3)$*:*

$$(\mathbf{0}-2)^2 + (\mathbf{3}-3)^2 = (-2)^2 + 0^2 = 4 \neq 25$$

entonces Q **no** pertenece a la circunferencia.

iii. Para $R(-2;0)$*:*

$$(\mathbf{-2}-2)^2 + (\mathbf{0}-3)^2 = (-4)^2 + (-3)^2 = 25 \quad ✔$$

entonces, Q **sí** pertenece a la circunferencia.

Ejemplo 10: *Hallar la ecuación de la circunferencia que,*

(a) Está centrada en el origen de coordenadas y tiene radio 4.
En este caso, es muy sencillo determinar la ecuación buscada ya que, al tener centro en el origen de coordenadas, utilizaremos la expresión,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Solo nos resta sustituir el radio $r = 4$,

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 = 16}}$$

(b) Está centrada en el punto $(\mathbf{-2}; \mathbf{3})$ *y tiene radio 5.*
El centro de la circunferencia está desplazado, respecto del origen de coordenadas. Entonces, debemos utilizar la expresión,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

con $h = -2$, $k = 3$ y $r = 5$ nos queda al sustituir,

$$(x - (\mathbf{-2}))^2 + (y - \mathbf{3})^2 = 5^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25}}$$

2.2.7. Circunferencia trigonométrica

En este apartado reuniremos una serie de conocimientos y herramientas que nos serán de gran utilidad para resolver ecuaciones trigonométricas. Empecemos por definir algunos conceptos.

Circunferencia unitaria

Se llama así a la circunferencia de radio 1 y centrada en el origen de coordenadas (Figura 3):

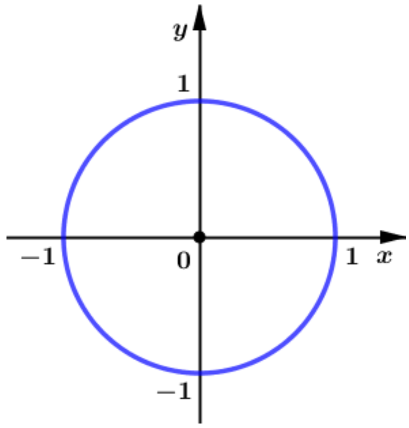


Figura 3

La ecuación de la circunferencia unitaria será:

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}}$$

Si sobre la circunferencia unitaria consideramos un punto $P(x; y)$ del *cuadrante I* y construimos con $O(0; 0)$ un triángulo rectángulo (el radio es la longitud de la hipotenusa) (Figura 4):

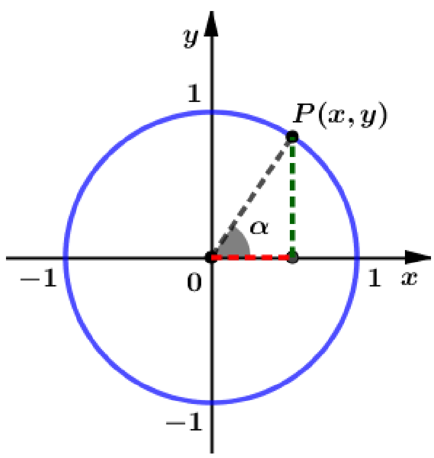


Figura 4

podemos observar, según vimos en el capítulo de trigonometría, que:

$$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{cat.op}{hip} = \frac{y}{1} = \boldsymbol{y}$$

Es decir, en la circunferencia unitaria, el **seno** del ángulo α estará dado por la ***altura*** del triángulo, y coincide con la coordenada en $\boldsymbol{y}$ del punto P.

$$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{cat.ady}{hip} = \frac{x}{1} = \boldsymbol{x}$$

De manera análoga, en la circunferencia unitaria, el **coseno** del ángulo α estará dado por la ***base*** del triángulo, y coincide con la coordenada en $\boldsymbol{x}$ del punto P.
Para encontrar la tangente de α, podemos aplicar la identidad trigonométrica

$$\tan\alpha = \frac{cat.op}{cat.ady} = \frac{x}{y} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Recordemos que en el capítulo de trigonometría obtuvimos el seno, coseno y tangente de los ángulos fundamentales. En el siguiente cuadro resumimos los valores allí encontrados.

$\boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}$	$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\alpha}$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$no\ existe$

¿Cómo podríamos obtener la secante, cosecante y cotangente de los ángulos fundamentales?

Es importante remarcar que hasta aquí hemos trabajado con ángulos ubicados todos en el primer cuadrante (Figura 5).

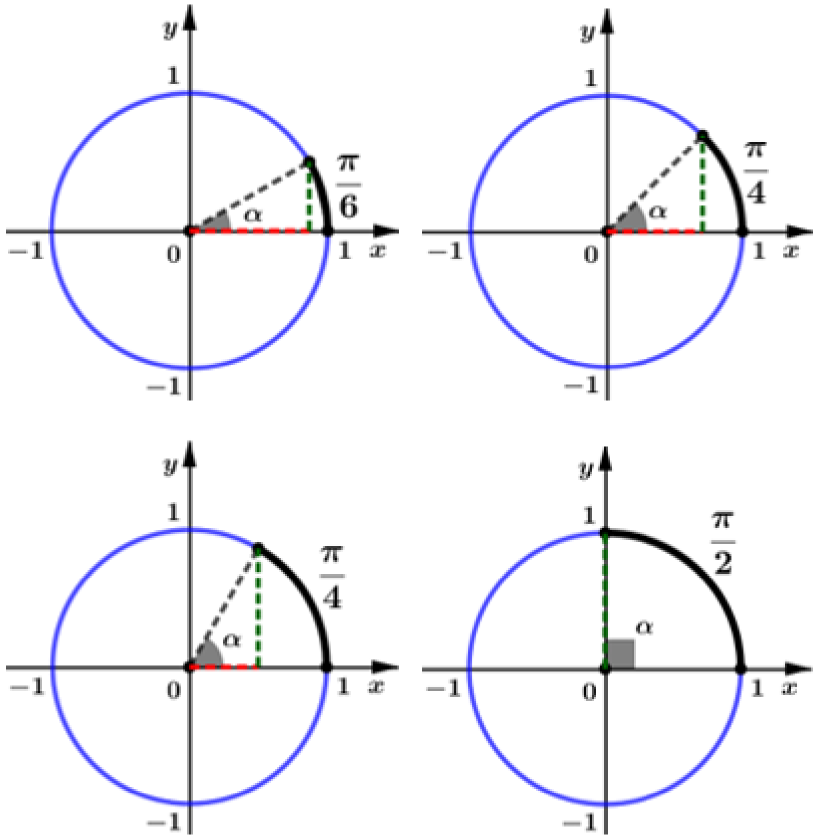


Figura 5

Sin embargo, si "desplazamos" el punto P por el resto de la circunferencia, tendremos ángulos que no están en el primer cuadrante. Entonces, las coordenadas del punto P tomarán en algunos casos valores negativos, es decir, las funciones trigonométricas en el resto de los cuadrantes ***no siempre son positivas o cero*** (Figura 6):

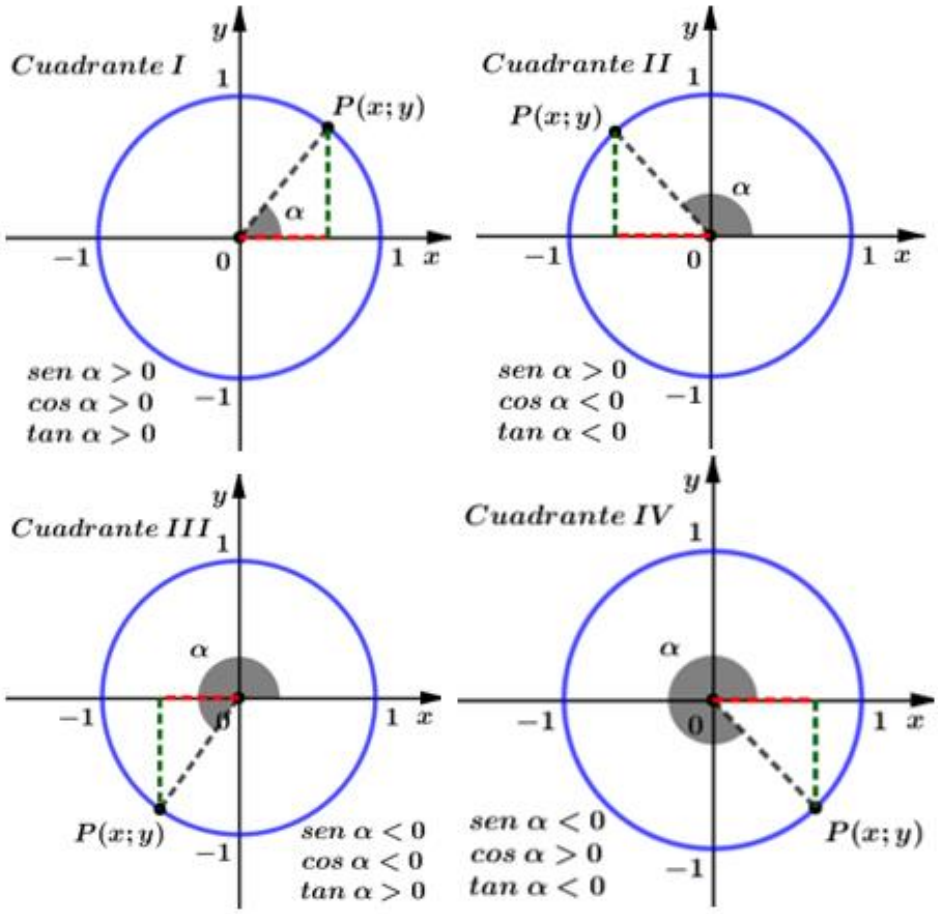


Figura 6

Veamos a continuación como podríamos deducir el seno, coseno y tangente de algunos ángulos que no están en el *cuadrante I* pero que se relacionan, por simetría, con los ángulos fundamentales. Por ejemplo: $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$, 2π .

i. *Seno, coseno y tangente de* $\boldsymbol{\frac{5}{6}\pi}$*:*

Si descomponemos el ángulo a través de la siguiente resta,

$$\boldsymbol{\frac{5}{6}\pi} = \frac{6}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \pi - \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

podemos hallar el seno, coseno y tangente de $\frac{5}{6}\pi$ relacionándolo con el seno, coseno y tangente de $\frac{\pi}{6}$. Para ello representemos ambos ángulos en la circunferencia unitaria (Figura 7) y observemos que el punto P para ambos arcos tiene la misma coordenada en $\boldsymbol{y}$ (**seno** del ángulo) pero las coordenadas en $\boldsymbol{x}$ (**coseno** del ángulo) son opuestas:

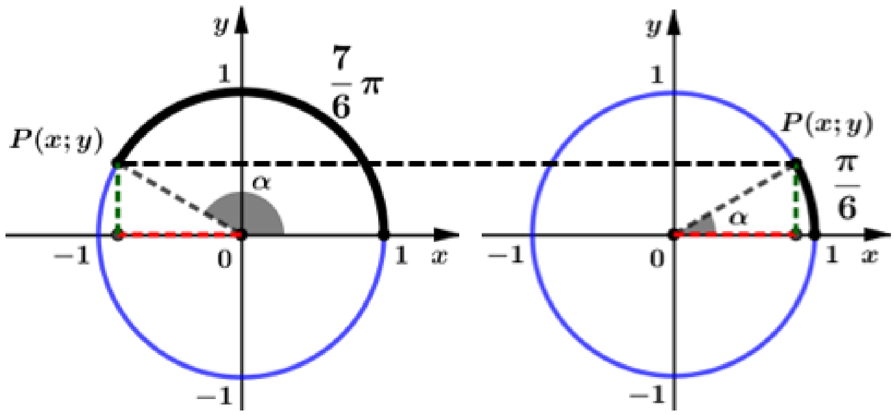


Figura 7

Entonces,

$\boldsymbol{\alpha}$	$\textbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}$	$\textbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}$	$\textbf{tan}\,\boldsymbol{\alpha}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\boldsymbol{\frac{5}{6}\pi}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

ii. *Seno, coseno y tangente de* $\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi}$*:*

Procediendo de forma análoga a la ya realizada y descomponiendo el ángulo a través una suma,

$$\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi} = \frac{3}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi = \pi + \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

nos queda,

$\boldsymbol{\alpha}$	$\textbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}$	$\textbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}$	$\textbf{tan}\,\boldsymbol{\alpha}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi}$	$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}}$

iii. Seno, coseno y tangente de $\frac{3}{2}\boldsymbol{\pi}$*:*

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi} = \frac{2}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$$

Nuevamente, si nos apoyamos en la representación gráfica de ambos ángulos (Figura 8), podemos ver que el punto P para ambos arcos tiene opuestas las coordenadas en $\boldsymbol{y}$ (**seno** del ángulo) pero la misma coordenada en $\boldsymbol{x}$ (**coseno** del ángulo):

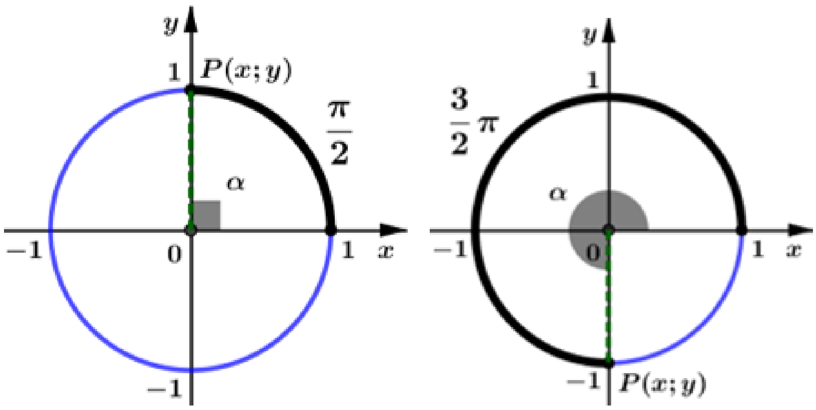


Figura 8

Quedando así,

$\boldsymbol{\alpha}$	**sen** $\boldsymbol{\alpha}$	**cos** $\boldsymbol{\alpha}$	**tan** $\boldsymbol{\alpha}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	*no existe*
$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$	***no existe***

Con estas relaciones se construye así la llama **circunferencia trigonométrica** (Figura 9), que nos brinda de forma abreviada las relaciones arriba estudiadas. Cada punto representado sobre la circunferencia tiene como primera coordenada al **coseno** del ángulo y como segunda coordenada al **seno**:

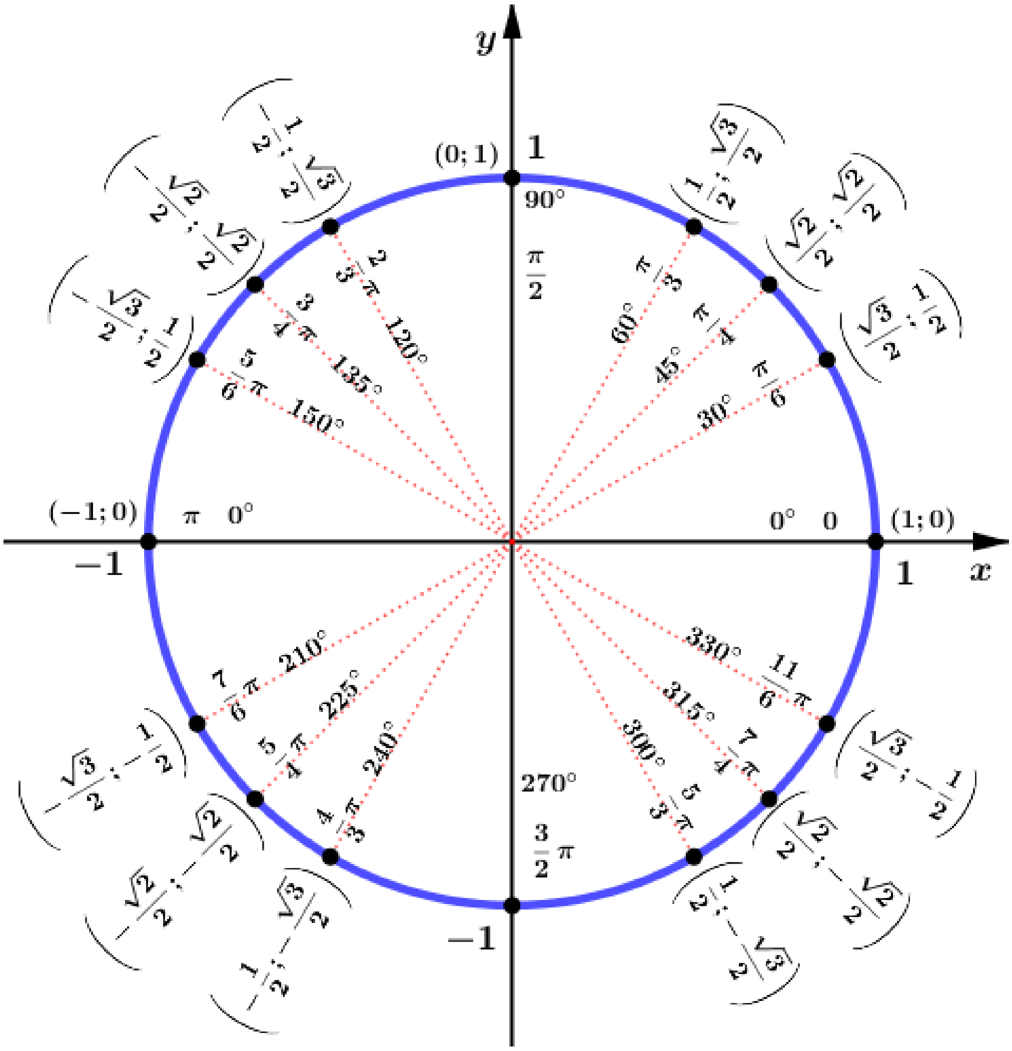


Figura 9

2.2.8. Ecuaciones trigonométricas

En una ecuación trigonométrica, la incógnita aparece en el argumento de una o varias expresiones trigonométricas. Como la incógnita es un ángulo, las soluciones, de existir, pueden presentarse en uno, dos e incluso en los cuatro cuadrantes y además repetirse en todas las vueltas que podemos dar (¡que son infinitas!) En este apartado nos bastará con encontrar la o las soluciones comprendidas entre 0º y 360º (entre 0 y 2π).

Para resolver este tipo de ecuaciones, haremos las transformaciones necesarias para trabajar con una **sola función trigonométrica** y para ello utilizaremos las identidades trigonométricas fundamentales:

Ejemplo 11: *Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas con* $\boldsymbol{0 \leq \alpha \leq 2\pi}$

(a)

$$\boldsymbol{sen^2x - cos^2x = \frac{1}{2}}$$

Según la identidad trigonométrica fundamental:

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

Si despejamos nos queda que,

$$sen^2x = \boldsymbol{1 - cos^2x}$$

$$\boldsymbol{1 - cos^2x} - cos^2x = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2cos^2x = \frac{1}{2}$$

$$-2cos^2x = -\frac{1}{2}$$

$$cos^2x = \frac{1}{4}$$

$$|\cos x| = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\cos x = 1/2 \quad o \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}} \text{ ó } \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}} \quad o \quad \boxed{\boldsymbol{x = \frac{4}{3}\pi} \text{ ó } \boldsymbol{\frac{5}{3}\pi}}$$

$$\therefore \boxed{S = \left\{\boldsymbol{\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi}\right\}}$$

(b)

$$\boldsymbol{-3\,sen\,x + cos^2x = 3}$$

Despejamos coseno de la identidad trigonométrica fundamental:

$$cos^2x = \boldsymbol{1 - sen^2x}$$

$$-3\,sen\,x + \boldsymbol{1 - sen^2x} = 3$$

$$sen^2x + 3\,sen\,x + 2 = 0$$

Sustituyendo por $\boldsymbol{y = \mathbf{sen}\,x}$

$$y^2 + 3y + 2 = 0$$

Utilizando la fórmula resolvente

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$y_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad o \quad \boldsymbol{y_2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

Descartamos el valor $y = 2$ ya que la función coseno está acotada entre 1 y -1 (analizado en el próximo capítulo).

$$\boldsymbol{sen\,x} = 1$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}}$$

$$\therefore \boxed{S = \left\{\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\right\}}$$

(c)

$$\boldsymbol{\tan x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x - 1 = 0}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x + \cos x - 1 = 0$$

Sustituyendo por $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x - 1 = 0$$

Sacando m.c.m de los denominadores

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \cos x$$

$$1 = \cos x$$

Aplicando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$\boxed{x = 0}$ *o* $\boxed{x = 2\pi}$ $\therefore$ $\boxed{S = \{0; 2\pi\}}$

(d)

$$\boldsymbol{4\tan^2 x = 3\sec^2 x}$$

Sustituyendo por :

$$\tan^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

y

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$4 \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$4\operatorname{sen}^2 x = 3$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4}$$

$$|\operatorname{sen} x| = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad o \quad \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{3}}$ *o* $\boxed{x = \frac{4}{3}\pi}$ *o* $\boxed{x = \frac{2}{3}\pi}$ *o* $\boxed{x = \frac{5}{3}\pi}$ $\therefore$ $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{4}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi\right\}}$

2.3. Sistemas de Ecuaciones

Supongamos que necesitamos hallar el valor de más de una incógnita, que a pesar de ser desconocidas disponemos de algunos datos que las relacionan. Como en la siguiente situación:

> *"Tiziano pagó en total $320 por la compra de una lapicera y 4 cuadernos iguales. En la misma librería, Marcela compró los mismos artículos que Tiziano, pero llevó una lapicera y 2 cuadernos. Si Marcela pagó $180 ¿cuál es el precio de la lapicera y de cada cuaderno?"*

Primero necesitaríamos encontrar una expresión que represente las relaciones establecidas. Como tenemos dos incógnitas, llamaremos x: "al precio de la lapicera" e y: "al precio del cuaderno".

Con respecto a Tiziano nos queda

$$x + 4y = 320$$

Con respecto a Marcela

$$x + 2y = 180$$

Resolver este problema equivale a encontrar los valores de x e y que verifican ambas ecuaciones lineales, determinando así **un sistema de ecuaciones lineales** (SEL) que escribiremos:

$$\begin{cases} x + 4y = 320 \\ x + 2y = 180 \end{cases}$$

> *Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es toda expresión de la forma:*
>
> $$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2 \end{cases}$$
>
> *donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ son números reales llamados **coeficientes del sistema** y b_1, b_2 son números reales llamados **términos independientes del sistema.***

2.3.1. Métodos de resolución de un SEL

Si bien existen numerosos métodos de resolución, para resolver el SEL obtenido en el apartado anterior nos conviene (ya que el primer término es igual en ambas ecuaciones) aplicar el ***método de reducción por sumas y restas.***

Este método consiste en reducir alguna de las ecuaciones, a través de sumas o restas, con el objetivo de eliminar términos y obtener así una ecuación más sencilla, en la que podamos despejar una de las incógnitas.

En este caso **reduciremos restando** las dos ecuaciones entre sí:

$$\begin{cases} x + 4y = 320 \\ x + 2y = 180 \end{cases} \qquad \begin{array}{rl} x + 4y = & 320 \\ x + 2y = & 180 \\ \hline \mathbf{2\,y} = & \mathbf{140} \end{array} \; -$$

Este procedimiento nos permitió obtener una nueva ecuación, con una sola incógnita, sencilla de despejar. De ella obtenemos

$$\boxed{\boldsymbol{y} = \mathbf{70}}$$

Para hallar el valor de $\boldsymbol{x}$ podemos sustituir el valor de $\boldsymbol{y}$ en cualquiera de las dos ecuaciones de nuestro sistema, ya que en las dos debería verificarse el valor encontrado. Por ejemplo, si sustituimos en la segunda:

$$x + 2 \cdot (70) = 180$$

resulta

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \mathbf{40}}$$

No debemos olvidar verificar la solución encontrada en las dos ecuaciones del SEL:

$$\begin{cases} 40 + 4 \cdot 70 = 40 + 280 = 320 \quad ✔ \\ 40 + 2 \cdot 70 = 40 + 140 = 180 \quad ✔ \end{cases}$$

Como hemos encontrado una *única* solución para cada incógnita, el *conjunto solución* del sistema está formado por un *único* par ordenado:

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{40}; \mathbf{70})\}}$$

Es decir, la lapicera cuesta $40 y cada cuaderno $70.

Supongamos otra situación, pero en la que debamos aplicar algunos conceptos de geometría vistos oportunamente:

Dado un triángulo rectángulo. Si sabemos que uno de sus ángulos agudos es 12° mayor que el otro, ¿podríamos averiguar cuanto miden dichos ángulos?

Al tratarse de un triángulo rectángulo, la suma de estos dos ángulos es igual a 90°, entonces escribimos

$$x + y = 90$$

Como uno de los ángulos es 12° mayor que el otro, nos queda

$$y = x + 12$$

Resultando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ y = x + 12 \end{cases}$$

En este caso, nos conviene aplicar el ***método de sustitución.*** Consiste en despejar una incógnita de cualquiera de las ecuaciones y **sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación.
Por este motivo aprovecharemos que en la *segunda* ecuación ya tenemos despejada la incógnita ***y***:

$$y = x + 12$$

Solo nos restará realizar la sustitución en la *primera* ecuación:

$$x + (\boldsymbol{x + 12}) = 90$$
$$2x = 78$$
$$\boxed{\boldsymbol{x = 39}}$$

Sustituyendo nuevamente,

$$y = (\mathbf{39}) + 12$$
$$\boxed{\boldsymbol{y = 51}}$$

Verifiquemos la solución encontrada en las dos ecuaciones del SEL:

$$\begin{cases} 39 + 51 = 90 & \checkmark \\ 51 = 39 + 12 & \checkmark \end{cases}$$

Nuevamente encontramos un único valor para x y un único valor para y. El *conjunto solución* está formado por el siguiente par ordenado:

$$\boxed{\boldsymbol{S = \{(39; 51)\}}}$$

Es decir, los ángulos miden 39° y 51°.

Para introducir el último método analítico que abordaremos en este capítulo, analicemos la siguiente situación:

> *"Si tenemos un número que excede en 12 unidades a otro; y al restarles 4 unidades a cada uno de ellos, el primero duplica al segundo. ¿Cuáles son esos dos números? "*

Un número que excede en 12 unidades a otro,

$$x = y + 12$$

Al restarles 4 unidades a cada uno de ellos, el primero duplica al segundo,

$$x - 4 = 2(y - 4)$$

Ordenemos esta última ecuación,

$$x = 2y - 8 + 4$$
$$x = 2y - 4$$

El sistema de ecuaciones a resolver resulta,

$$\begin{cases} x = y + 12 \\ x = 2y - 4 \end{cases}$$

En este caso nos conviene aplicar el ***método de igualación***. Consiste en despejar la **misma incógnita** de ambas ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas.

Como en este caso ya tenemos despejadas la misma incógnita en las dos ecuaciones, solo nos queda igualar las expresiones del segundo miembro de cada una de ellas:

$$y + 12 = 2y - 4$$
$$\boxed{\boldsymbol{y = 16}}$$

Sustituyendo nuevamente, en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo, al sustituir en la primera:

$$x \; = (\mathbf{16}) + 12$$
$$\boxed{\boldsymbol{x = 28}}$$

El *conjunto solución* está formado por el siguiente par ordenado:

$$\boxed{\boldsymbol{S = \{(28; 16)\}}}$$

Los dos números buscados son 16 y 28.

Hasta aquí hemos hecho una primera aproximación de los métodos analíticos más comunes para resolver sistemas de ecuaciones, que en los próximos ejemplos seguiremos profundizando.
Además, en las distintas situaciones que abordamos nos encontramos con tres sistemas que tenían una única solución. Es importante señalar que esto no siempre será así.
Todo SEL puede tener única, infinitas o ninguna solución y se clasifica, según sea el caso, en:

Compatible determinado	**Compatible indeterminado**	**Incompatible**
Tiene única solución	Tiene infinitas soluciones	Carece de solución

Los tres sistemas que hemos resuelto son entonces **compatibles determinados.** En los próximos ejemplos profundizaremos en los métodos aquí presentados y estudiaremos otros casos.

Ejemplo 12: *Dados el siguiente sistema de ecuaciones lineales,*

$$\begin{cases} \mathbf{2x + 4y = 2} \\ \mathbf{-x - 6y \ = 7} \end{cases}$$ *resolverlo por el método de sustitución*

El ***método de sustitución*** consistía en despejar una incógnita de cualquiera de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación. En este ejemplo como ninguna de las incógnitas está despejada, elegiremos la más sencilla,

$$-x - 6y \ = 7$$
$$-x = 7 + 6y$$
$$\boxed{x = -7 - 6y} \ (*)$$

La expresión obtenida para $\boldsymbol{x}$ de la segunda ecuación debemos sustituirla, en la primera:

$$2 \cdot (\mathbf{-7 - 6y}) + 4y = 2$$

Apliquemos propiedad distributiva y despejemos:

$$-14 - 12y + 4y = 2$$
$$-8y = 16$$
$$\boxed{\mathbf{y = -2}}$$

Solo nos queda sustituir nuevamente este valor hallado, en la ecuación (*), con el fin de encontrar el valor de $\boldsymbol{x}$:

$$x = -7 - 6(\mathbf{-2})$$
$$\boxed{\mathbf{x = 5}}$$

Es importante realizar el proceso de verificación ya que los valores hallados deben verificar **todas** las ecuaciones del sistema,

$$2(\mathbf{5}) + 4 \cdot (\mathbf{-2}) = 10 - 8 = 2 \ \checkmark$$

$$-(\mathbf{5}) - 6 \cdot (\mathbf{-2}) \ = -5 + 12 = 7 \ \checkmark$$

Finalmente podemos escribir el **conjunto solución**:

$$\mathrm{S} = \{(5; -2)\}$$

Como existe un único valor para x y un único valor para y se trata de un **sistema compatible determinado**.

2.3.2. Interpretación geométrica de un SEL compatible determinado

Observemos, a partir del ejemplo anterior, que cada una de las ecuaciones del sistema dado, es la ecuación general o implícita de una recta en el plano. Podemos interpretar geométricamente que, encontrar la solución de este sistema es encontrar los puntos (x, y) que tienen en común las rectas determinadas por estas dos ecuaciones.
Despejando $\boldsymbol{y}$ en ambas ecuaciones nos queda:

$$\begin{cases} \mathbf{2x + 4y = 2} \\ \mathbf{-x - 6y \ = 7} \end{cases} \sim \begin{cases} \boldsymbol{y} = \ \mathbf{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \ = \mathbf{-\frac{7}{6} - \frac{1}{6}}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

Grafiquemos juntas las dos rectas determinadas por las ecuaciones del sistema:

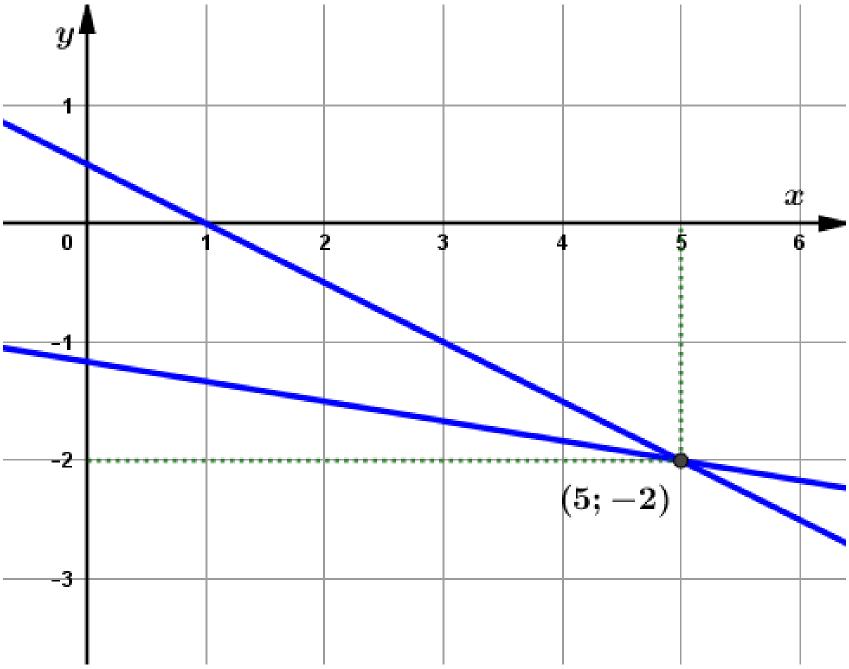


Figura 10

Como las dos rectas son secantes, tiene un único punto en común,
$S = \{(5; -2)\}$

Ejemplo 13: Dados el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x+4y=2} \\ \boldsymbol{-6x-12y\ =7} \end{cases} \quad \text{resolverlo por el método de igualación}$$

El ***método de igualación*** consistía en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas. Podemos despejar cualquiera de las dos incógnitas, por ejemplo, si despejemos $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{aligned} 2x+4y&=2 \\ 2x&=2-4y \\ x&=\frac{2-4y}{2} \\ \boxed{x=1-2y} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -6x-12y\ &=7 \\ -6x\ &=7+12y \\ x\ &=\frac{7+12y}{-6} \\ \boxed{x\ =-\frac{7}{6}-2y} \end{aligned}$$

A continuación, debemos igualar ambas expresiones y obtener así, una única ecuación con única incógnita:

$$1-2y=-\frac{7}{6}-2y$$

Despejando

$$-2y+2y=-\frac{7}{6}-1$$
$$0\cdot y=-\frac{13}{6}$$

Sin embargo, podemos notar que no existe ningún número real que multiplicado por cero nos dé como resultado $-\frac{13}{6}$. Cualquier número real que propongamos para y, al multiplicarlo por cero, nos quedará esta igualdad:

$$0=-\frac{13}{6} \qquad Absurdo$$

El sistema de ecuaciones carece de solución, entonces, el **conjunto solución** no tiene elementos. Se dice que es vacío y se escribe,

$$\mathrm{S}=\emptyset$$

Se trata de un **sistema incompatible**.

2.3.3. Interpretación geométrica de un SEL incompatible

Notemos que en el *Ejemplo 13* las ecuaciones del sistema deben corresponderse con rectas del plano que NO tengan intersección. Podemos interpretar geométricamente que se trata entonces de dos rectas paralelas. Despejemos ambas ecuaciones y grafiquemos para comprobar esta idea:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ -6x - 12y = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} \boldsymbol{y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x} \\ \boldsymbol{y = -\frac{7}{12} - \frac{1}{2}x} \end{cases}$$

Gráficamente:

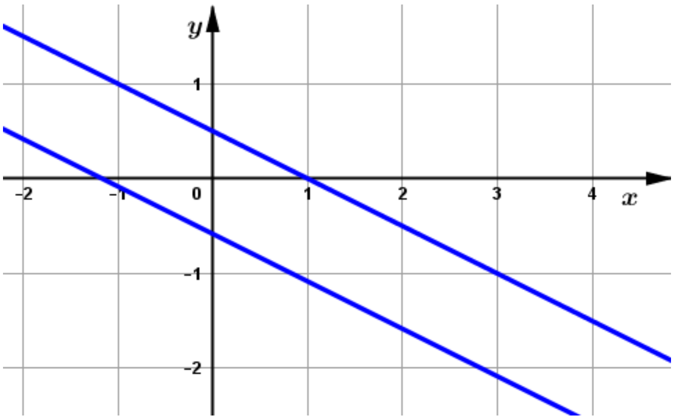


Figura 11

El SEL está determinado por dos ecuaciones que representan dos rectas paralelas, y al no tener ningún punto en común la intersección es inexistente. Es decir, $S = \emptyset$

¿Cómo justificarías, sin hacer cuentas, que el siguiente SEL:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$$ es incompatible?

Ejemplo 14: *Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales,*

$$\begin{cases} \mathbf{2x + 4y = 2} \\ \mathbf{-6x - 12y = -6} \end{cases}$$ *,resolverlo por el método de reducción por sumas y restas*

El ***método de reducción por sumas y restas*** es uno de los métodos más útiles cuando tenemos más de dos ecuaciones. Como ya explicamos, consiste en reducir ecuaciones, anulando términos de la misma para obtener así ecuaciones más sencillas y despejar de estas las incógnitas.

Para ello tenemos dos operaciones permitidas:

- *Multiplicar una ecuación por cualquier número real, distinto de cero.*
- *Sumar (o restar) dos ecuaciones entre sí.*

Por ejemplo, si **multiplicamos** la segunda ecuación por **1/3** lograríamos que el coeficiente de $\boldsymbol{x}$ de la primera ecuación y el de la segunda sean opuestos. Entonces al **sumar** las ecuaciones entre sí, estos dos términos se anularían mutuamente (reduciendo así la ecuación).

$$\mathbf{\frac{1}{3}} \times (-6x - 12y = -6)$$
$$-2x - 4y = -2$$

Podemos reemplazar la segunda ecuación del SEL por la que acabamos de obtener y aunque el sistema sea diferente, el conjunto solución es el mismo. Se dice que son **sistemas equivalentes**:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ -6x - 12y = -6 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases}$$

Si sumamos del último SEL las dos ecuaciones, miembro a miembro, nos queda:

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 2 \\ -2x - 4y = -2 \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{array} \quad +$$

El procedimiento anterior nos permite obtener siempre **sistemas equivalentes, pero más sencillos**.

Hemos obtenido así, a través de las operaciones permitidas tres SEL equivalentes y por supuesto, nos quedaremos con el último para resolver el ejercicio:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ -6x - 12y = -6 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Notemos que la segunda ecuación (del último sistema) se verifica con cualquier número real. Es decir, existen infinitas soluciones que verifican dicha ecuación, pero no nos brinda ninguna información respecto a la relación que existe entre las incógnitas. Solo nos resta, entonces, una única ecuación en el sistema para analizar:

$$2x + 4y = 2$$

Despejando una de las incógnitas en función de la otra,

$$x = \frac{2 - 4y}{2}$$

$$\boxed{x = 1 - 2y}$$

De esta manera, $\boldsymbol{y}$ puede tomar cualquier número real, pero $\boldsymbol{x}$ solo podrá tomar los valores dados por la expresión obtenida.
Cuando el sistema tiene infinitas soluciones, también es posible verificar la expresión encontrada, remplazándola en **todas** las ecuaciones del sistema como haremos a continuación:

$$2 \cdot (\mathbf{1 - 2}\boldsymbol{y}) + 4y = 2 - 4y + 4y = 2 \quad \checkmark$$

$$-6 \cdot (\mathbf{1 - 2}\boldsymbol{y}) - 12y = -6 + 12y - 12y = -6 \quad \checkmark$$

El **conjunto solución** del sistema de ecuaciones lineales en este caso tiene infinitas soluciones posibles y se escribe,

$$S = \{(1 - 2y\,;\ y)\ /\ y \in \mathbb{R}\}$$

Diremos que se trata de un sistema **compatible indeterminado**.

2.3.4. Interpretación geométrica de un SEL compatible indeterminado

En el Ejemplo 14 las ecuaciones del sistema dado deben corresponderse con rectas del plano que se intersequen en infinitos puntos. Pero esto solo puede ocurrir si se trata de la misma recta. Es decir, podemos interpretar geométricamente que se trata de dos *rectas coincidentes*:

$$\begin{cases} \mathbf{2x + 4y = 2} \\ \mathbf{-6x - 12y = -6} \end{cases} \sim \begin{cases} \boldsymbol{y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x} \\ \boldsymbol{y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x} \end{cases}$$

Gráficamente:

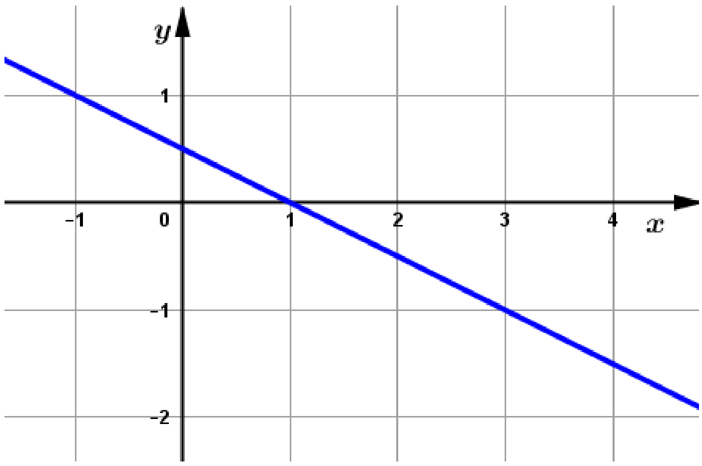


Figura 12

El SEL está determinado por dos rectas idénticas, entonces tendrán sus infinitos puntos en común. $S = \{(1 - 2y\,;\, y)\ /\ y \in \mathbb{R}\}$

¿Si alguna de las ecuaciones del SEL es de la forma $0x = b$, este podría ser compatible determinado?

Ejemplo 15: *Interpretar gráficamente para qué valores de a y b el siguiente sistema es compatible determinado:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{y - ax = 5} \\ \\ \boldsymbol{4x - b = y} \end{cases}$$

Si ordenamos convenientemente el sistema de ecuaciones nos queda:

$$\begin{cases} y = ax + 5 \\ \\ y = \ 4x - b \end{cases}$$

El SEL será compatible determinado cuando las rectas, que representan cada una de las ecuaciones del sistema, sean ***secantes***. Es decir, cuando tengan ***distinta*** pendiente. Esto ocurre cuando los coeficientes de x son distintos. Sin importar, en este caso, el término independiente (ya que este último no modifica la pendiente de la recta).

Finalmente, el SEL resulta compatible determinado para:

$$\boxed{\boldsymbol{a \neq \ 4 \ \ y \ \ b} \in \mathbb{R}}$$

Ejemplo 16: *Interpretar gráficamente los valores de a y b para que el siguiente sistema sea incompatible:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x + y = -1} \\ \\ \boldsymbol{ax - b = y} \end{cases}$$

Si ordenamos nuevamente el sistema:

$$\begin{cases} y = -3x - 1 \\ \\ y = \ ax - b \end{cases}$$

El SEL resulta incompatible cuando las rectas, que representan cada una de las ecuaciones del sistema, son **paralelas**. Es decir, tienen la ***misma*** pendiente y ***ningún*** punto en común. Esto ocurre cuando los coeficientes de x son iguales y los términos independiente distintos:

$$\boxed{\boldsymbol{a = -3 \ \ y \ \ \ b} \neq 1}$$

Ejemplo 17: *Hallar analíticamente los valores de a y b para que el siguiente sistema sea compatible determinado:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + 3 = y} \\ \boldsymbol{2x - b = y} \end{cases}$$

Se trata del Ejemplo 16, pero tenemos que buscar una estrategia diferente para resolverlo. En este tipo de problemas, con parámetros, nos convendrá buscar un sistema equivalente al dado, pero más sencillo.

$$\begin{cases} ax - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{-3} \\ 2x - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \end{cases}$$

Para ellos, debemos reducir términos, restando ambas ecuaciones, miembro a miembro,

$$\begin{array}{r} ax - y = -3 \\ 2x - y = b \\ \hline (a-2)x + 0\,y = -3 - b \end{array} \quad -$$

$$\begin{cases} ax - y = -3 \\ 2x - y = b \end{cases} \sim \begin{cases} ax - y = -3 \\ (a-2)x = -3 - b \end{cases}$$

Nos interesará analizar en el último sistema hallado, aquellos valores que hacen cero el coeficiente de la incógnita $\boldsymbol{x}$:

- *Si* $\boldsymbol{a = 2}$ *el SEL nos queda,*

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ \boldsymbol{0}x = -3 - b \end{cases}$$

Como hemos visto en ejemplos anteriores, si el coeficiente de una ecuación es cero, esta solo puede tener:

- *Infinitas soluciones: si el término independiente también es cero. Es decir, si* $b = -3$

- *Ninguna solución: si el término independiente no es cero. Es decir, si* $b \neq -3$

- *Si* $\boldsymbol{a \neq 2}$ *el SEL resulta siempre compatible determinado, sin importar el valor que tome b ya que este último no modifica los coeficientes del sistema.*

Finalmente, el SEL resulta compatible determinado para:

$$\boxed{\boldsymbol{a \neq 2 \ y \ \ b} \in \mathbb{R}}$$

2.4. Aplicaciones físicas

Las ciencias naturales, en particular la Física, parten de la observación de un fenómeno, y su objetivo es encontrar las leyes que lo gobiernan. Para esto se valen de modelos, es decir, descripciones simplificadas de dicho fenómeno, que en ocasiones nos permiten describir un estado de un sistema mediante herramientas matemáticas.

Para ello, generalmente es necesario efectuar hipótesis que simplifiquen la situación y nos permitan modelizar el fenómeno a través de un número finito de parámetros y variables involucradas.

La historia de la ciencia es testigo de las variaciones de los modelos a lo largo del tiempo. Donde antiguamente se hablaba de éter como un medio invisible para las transformaciones físicas, hoy utilizamos el concepto de vacío. Antes de Einstein, el tiempo era un parámetro absoluto. La Física cuántica da lugar a un nuevo paradigma, pero eso no significa que la mecánica clásica se descarte. Al día de hoy, seguimos estudiando los fenómenos macroscópicos mediante las leyes de Newton. Y esto es así porque el modelo de la mecánica clásica representa de forma adecuada a estos fenómenos.

En general, un fenómeno se traduce en un modelo físico, y este a su vez en un modelo matemático. Es en este punto donde las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones nos ayudan a encontrar, entre otras cosas, un estado final para el modelo, con parámetros conocidos y variables que pueden depender de estos y entre sí.

La segunda Ley de Newton, por ejemplo, nos dice que la fuerza neta aplicada sobre un cuerpo será proporcional a la aceleración que adquirirá dicho cuerpo. Esta descripción, sumamente importante para la Física, puede ser traducida mediante un modelo matemático, a partir de la ecuación,

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

donde tanto la fuerza como la aceleración serán magnitudes vectoriales, y la masa será la constante de proporcionalidad entre ambas magnitudes.
Otra ecuación relativamente sencilla, pero muy importante en la Física es la ley de Ohm, que nos indica que la diferencia de potencial V a la que es sometido un conductor, será proporcional a la corriente I que circula por dicho conductor. En este caso, la constante de proporcionalidad será la resistencia eléctrica del material conductor.

$$V = R \cdot I$$

La Ley de los Gases Ideales, una de las leyes más conocidas de la Química, es una ley empírica que tiene sus bases en la ley de Boyle, que relaciona el volumen ocupado por un gas en un recipiente cerrado y la presión que dicho gas ejerce sobre el recipiente. Esta ley, además, incorpora una tercera variable que es la temperatura y nos permite tener un modelo para un gas ideal.

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

En este caso, R es una constante de proporcionalidad, p será la presión ejercida por el gas, V el volumen ocupado, n el número de moles del gas y T la temperatura en grados Kelvin. A la constante R se la conoce como *Constante Universal de los Gases Ideales*.
En algunas oportunidades, los fenómenos pueden estar aislados, es decir, nos puede interesar conocer la aceleración que adquiere un cuerpo al ser sometido a una fuerza neta. Pero en otros, los fenómenos a observar ocurren sobre un conjunto de elementos, y en estos casos necesitaremos recurrir a los sistemas de ecuaciones.
Cuanto mayor sea la cantidad de elementos del sistema físico, y cuanto más compleja sea la relación entre las variables de dicho sistema, mayor será la dificultad a la hora de analizar el comportamiento del fenómeno. En algunos sistemas sencillos, donde las variables se relacionan en forma lineal y contamos con pocos elementos, podremos ser capaces de predecir el comportamiento del sistema con alguno de los métodos vistos. A medida que aumenta el número de elementos, o las relaciones matemáticas de las variables son más complejas, la resolución se dificulta. En la realidad, muchas veces debemos recurrir a métodos computacionales con soluciones aproximadas, y en algunos casos, no existen métodos con la capacidad de cálculo suficiente para la resolución.

2.4.1. Ecuación Horaria

Una de las primeras ecuaciones que trabajaremos es la ecuación horaria. Este tipo de expresión nos muestra cómo varía la posición de un móvil para un instante de tiempo determinado, por lo que estos *parámetros* también suelen tomar el nombre de *variables*.
Una ecuación horaria es una ecuación que necesariamente debe contener como incógnitas la *posición* (x) y el *tiempo* (t).
Existen dos movimientos, conocidos como Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU) y Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV).
En este apartado, veremos algunas de las ecuaciones que los caracterizan.
Es importante desatacar que, si bien en nuestras ecuaciones aparecerán magnitudes vectoriales como la posición y la velocidad, trabajaremos siempre en una dirección, por lo que nuestro tratamiento será ***escalar***.

2.4.2. Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

Caso de un móvil que se desplaza en línea recta a velocidad constante.

Ejemplo 18: *Supongamos que el día es ideal para hacer una salida al campo. Para ello nos subimos a un auto y vamos por una ruta recta y sin obstáculos, mantenemos una velocidad de* $100\ km/h$ *y recién nos detenemos a las dos horas. ¿Qué distancia hemos recorrido?*

Casi intuitivamente responderíamos $200\ km$. Nuestra intuición no ha hecho más que resolver la siguiente operación:

$$distancia\ recorrida = 100\frac{km}{h} \cdot 2h = 200km$$

¿Pero qué tal si quisiéramos tener una expresión que nos permita saber la distancia recorrida para cada tiempo de conducción en estas condiciones?
La ecuación que representaría esta situación sería:

$$\boxed{d = 100\frac{km}{h}t_c}$$

¿Y si quisiera saber cuánto tiempo deberemos manejar para recorrer $450\ km$?

Pues en esa situación deberemos despejar la incógnita que nos interesa, en este caso el tiempo.

$$d = 100\frac{km}{h}t_c \Rightarrow t_c = \frac{d}{100\frac{km}{h}}$$

$$t_c = \frac{450\ km}{100\frac{km}{h}} = \boxed{\mathbf{4,5h}}$$

Para un caso general con una velocidad constante v cualquiera en la dirección del recorrido, tendremos:

$$d = v \cdot t_c$$

En este caso utilizamos $\frac{km}{h}$ como unidad de velocidad, km como unidad de distancia y h como unidad de tiempo. Es más habitual en Física utilizar el sistema internacional de medida, con la velocidad en $\frac{m}{s}$, m como unidad de distancia y el s como unidad de tiempo.
Sin importar qué conjunto de unidades utilicemos, lo importante es que sean compatibles, ya que la validez de nuestros resultados dependerá de eso.

Ejemplo 19: *Ahora compliquemos un poco más las cosas. Para llegar a nuestro ansiado destino campestre vamos a partir del kilómetro 180 de nuestra ruta recta y despejada, a las* $8{:}00\ AM$, *y vamos a manejar a una velocidad de* $80\ km/h$ *en dirección a nuestro destino, al que llegaremos a las* $11{:}00\ AM$. *¿En qué kilómetro de la ruta nos encontraremos al finalizar el recorrido, si la numeración de la ruta es creciente?*

En este caso tenemos una posición inicial, un tiempo de partida y un tiempo de llegada. La velocidad sigue siendo constante. Si usamos la ecuación vista anteriormente podríamos calcular una distancia y sumar ese kilometraje a la posición inicial, quedando:

$$x_f = x_i + d = x_i + v \cdot t_c$$

No tenemos el dato del tiempo de conducción, pero podemos calcularlo restándole al tiempo de llegada, el de partida.

$$x_f = x_i + v \cdot (t_f - t_i)$$

Donde x_i y t_i son constantes y representan la posición y el tiempo iniciales respectivamente, v es la velocidad constante, y x_f y t_f serán las variables que caracterizan a nuestra ecuación horaria del MRU, a la que también se la puede escribir como:

$$x = x_i + v \cdot (t - t_i)$$

Para responder a nuestra pregunta original reemplazaremos los datos del problema:

$$x_f = 180km + 80\frac{km}{h} \cdot (11h - 8h) = \boxed{\mathbf{420km}}$$

Nuestro destino se encuentra en el **kilómetro 420** de la ruta.
Para nuestro problema particular, si queremos una ecuación horaria que nos permita calcular la posición para cualquier tiempo, tendremos:

$$\boxed{x_f = 180km + 80\frac{km}{h} \cdot (t - 8h)}$$

Ejemplo 20: *Se terminó nuestro día de descanso y debemos volver a casa, retornamos por el mismo camino y a la misma velocidad. Si manejamos durante una hora antes de parar en una estación de servicio ¿En qué kilómetro de la ruta se encuentra la estación?*

Ahora nuestra posición inicial no es el kilómetro 180, sino el 420, y como tenemos como dato el tiempo transcurrido, asumiremos un tiempo inicial igual a cero, entonces escribimos

$$x_f = 420km + 80\frac{km}{h} \cdot 1h = 500km$$

¿Tiene sentido este resultado? ¡La respuesta es no!
Recordemos que cuando iniciamos el viaje por la mañana en el kilómetro 180, la ruta fue aumentando su numeración hasta llegar a nuestro destino en el kilómetro 420. Si estamos volviendo desde allí, lo esperable es que estemos en un lugar entre el kilómetro 180 y el kilómetro 420. ¿Qué fue lo que ocurrió? No tomamos en cuenta nuestro sistema de referencia, en este caso la ruta.

Como el sentido de nuestro sistema de referencia es positivo hacia el campo, la velocidad a la vuelta debe ser opuesta. Es decir, negativa (-80 km/h).
Siempre deberemos elegir un sentido positivo para el sistema de referencia. De esta manera, si el movimiento coincide con ese sentido, la velocidad será positiva, cuando el movimiento se opone, la velocidad será negativa.
¿Esto quiere decir que hay dos ecuaciones horarias para el MRU? *No.* ***La ecuación es única, pero el signo de la velocidad dependerá del sistema elegido.***
En este caso la elección es sencilla, ya que el sentido creciente de la numeración de la ruta nos da el sentido positivo del sistema de referencia. Entonces nos quedará:

$$x_f = 420km + \left(-80\frac{km}{h}\right) \cdot 1h = \boxed{\boldsymbol{340km}}$$

Es decir, que la estación de servicio se encuentra en el **kilómetro 340** de nuestra ruta ideal.

2.4.3. Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

Caso de un móvil que se desplaza en línea recta con velocidad uniformemente variada.

Este caso quedará representado por la siguiente ecuación horaria:

$$\boxed{x = x_i + v_0 \cdot (t - t_i) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_i)^2}$$

Vemos que tenemos nuevamente las variables x y t, pero ahora la velocidad no es v, sino v_0, que es la velocidad inicial, y aparece un término cuadrático y un coeficiente a, que corresponde a la aceleración constante.
En este tipo de movimiento, no cambia solamente la posición del móvil, también varía su velocidad. Esa variación de la velocidad se puede representar mediante otra ecuación horaria, que describe cómo cambia la velocidad a medida que transcurre el tiempo. En este caso, las variables serán v y t:

$$\boxed{v = v_0 + a \cdot (t - t_i)}$$

donde v_0 es la velocidad inicial, v será la velocidad para un instante t y a la aceleración ***constante***. Las unidades de a serán de distancia dividida por tiempo al cuadrado, en general se usa $\frac{m}{s^2}$, que corresponde al sistema internacional.
Nuevamente, debemos recordar que todas las unidades deberán ser compatibles para obtener resultados válidos, por lo que es aconsejable pasar todo al SI de medidas.

Ejemplo 21: *Un tren se mueve a una velocidad de* $30\,m/s$ *y debe reducir su velocidad a* $20\,m/s$ *antes de alcanzar un puente. Si demora para ello 5 segundos, ¿a qué distancia se encuentra el puente?*

En primer lugar, debemos ver con qué tipo de movimiento estamos trabajando. Como hay una variación de la velocidad podemos descartar el MRU, ya que en ese movimiento la velocidad se mantiene constante. Eso nos deja con el MRUV, asumiendo que la velocidad varía por la acción de una aceleración constante.
Ahora veamos qué nos pide el problema y de qué datos disponemos. Nos preguntan una distancia recorrida, que será la diferencia entre nuestra posición inicial y nuestra posición final. Para ello podemos usar

$$x = x_i + v_0 \cdot (t - t_i) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_i)^2$$

¿Qué datos tenemos?
Podemos asumir que $x_i = 0\,m$, dado que queda a nuestro criterio la elección del sistema de referencia. En este caso, elegiremos un sistema de referencia positivo en el sentido de movimiento del tren y con origen en la posición que tiene este al instante de aplicar los frenos. Otro dato es $v_0 = 30\ km/h$ y el sentido del movimiento coincide con el sistema de referencia, por lo que su signo será positivo.
Con la expresión, $t - t_i$, se hace referencia al tiempo trascurrido para variar la velocidad de $30\,km/h$ hasta $20\ km/h$, que según los datos del problema es de $5s$.
Lo único desconocido para poder calcular x_f, es el valor de la aceleración.
Pero tenemos una forma de calcular esa aceleración, y es a través de la segunda ecuación horaria del MRUV:

$$v = v_0 + a \cdot (t - t_i)$$

Para una velocidad final de $20\,m/s$ nos queda:

$$20\frac{m}{s} = 30\frac{m}{s} + a \cdot (5\,s)$$

$$a = \frac{20\frac{m}{s} - 30\frac{m}{s}}{5s}$$

$$\boldsymbol{a = -2\frac{m}{s^2}}$$

El signo de la aceleración, opuesto al de la velocidad, nos dice que la aceleración le quita al valor absoluto de nuestra velocidad $2\,m/s$ por cada segundo en el que actúe. Es decir, en 5 segundos, la aceleración le quita 10 m/s a dicha magnitud. Por lo cual se reduce de $30\,m/s$ a $20\,m/s$.
Ya tenemos el valor de la aceleración, por lo que solo nos queda reemplazarlo en la primera ecuación horaria del MRUV

$$x = 0m + 30\frac{m}{s} \cdot 5s + \frac{1}{2}\left(-2\frac{m}{s^2}\right)(5\,s)^2 = 150\,m - 25\,m = \boxed{\mathbf{125\,m}}$$

Es decir, que el tren debe recorrer una distancia de $125\,m$ durante $5s$ para poder disminuir su velocidad de $30\,m/s$ a $20\,m/s$, con una aceleración de $-2\,m/s^2$. **El puente se encuentra a $\boldsymbol{125\,m}$.**

2.4.2. Encuentro

En este tipo de problema, se busca determinar una posición y un momento en el que dos móviles se encuentran durante sus trayectorias.

Ejemplo 22: *Recordemos nuestra escapada al campo: partíamos del kilómetro 180 de la ruta a las* $8{:}00$ *AM y manejábamos a una velocidad de* $80\,km/h$. *Supongamos ahora que un amigo, Patricio, tuvo la misma idea, sale de la ruta un poco más adelante, en el kilómetro 240, a las* $9{:}00$ *AM y maneja a una velocidad constante de* $100\,km/h$. *¿Nos encontraremos en el camino?*

En ambos casos, estamos en una situación de MRU. Tomaremos el mismo sistema de referencia, recordemos que era la ruta, y plantearemos nuestras ecuaciones horarias, para hallar, en caso de existir, el par (x_e, t_e), que nos dará la posición y el tiempo en el que ocurre el encuentro.

Para nuestro auto tenemos:

$$x_e = 180km + 80\frac{km}{h} \cdot (t_e - 8h)$$

Para Patricio:

$$x_e = 240km + 100\frac{km}{h} \cdot (t_e - 9h)$$

Tenemos dos ecuaciones con las mismas dos incógnitas, por lo que podemos resolver el sistema por alguno de los métodos vistos. En particular, dado que ya tenemos despejada en ambas ecuaciones x_e, el método de igualación parece ser el más adecuado.

$$\begin{cases} x_e = 180km + 80\frac{km}{h} \cdot (t_e - 8h) \\ x_e = 240km + 100\frac{km}{h} \cdot (t_e - 9h) \end{cases}$$

Como ya vimos, el método de igualación consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas. En este caso igualaremos las expresiones de x_e de ambas ecuaciones

$$180km + 80\frac{km}{h} \cdot (t_e - 8h) = 240km + 100\frac{km}{h} \cdot (t_e - 9h)$$

Este procedimiento también nos permitió obtener una sola ecuación con una única incógnita (t_e). Despejamos su valor:

$$180km + 80\frac{km}{h} \cdot t_e - 80\frac{km}{h}.8h = 240km + 100\frac{km}{h} \cdot t_e - 100\frac{km}{h} \cdot 9h$$

$$80\frac{km}{h} \cdot t_e - 100\frac{km}{h} \cdot t_e = 240km - 100\frac{km}{h} \cdot 9h + 80\frac{km}{h} \cdot 8h - 180km$$

$$\left(80\frac{km}{h} - 100\frac{km}{h}\right) \cdot t_e = 240km - 900km + 640km - 180km$$

$$-20\frac{km}{h} \cdot t_e = -200km$$

$$t_e = \frac{-200km}{-20\frac{km}{h}} = \boxed{\mathbf{10h}}$$

Mi amigo Patricio y yo nos encontraremos a las 10:00 AM.

Aún nos falta saber en qué lugar de la ruta ocurrirá el encuentro. Para ello, bastará con reemplazar en cualquiera de las dos ecuaciones horarias el tiempo de encuentro hallado y despejar.
Si elegimos la que corresponde a nuestra posición:

$$x_e = 180km + 80\frac{km}{h} \cdot (10h - 8h) = \boxed{\mathbf{340km}}$$

Significa que nos encontraremos a las 10 h en el km 340 de la ruta.
Antes de finalizar, es recomendable verificar que los valores de t_e y x_e hallados verifiquen las dos ecuaciones del sistema,

$$340km = 180km + 80\frac{km}{h} \cdot (10h - 8h) \checkmark$$

$$340km = 240km + 100\frac{km}{h} \cdot (10h - 9h) \checkmark$$

Podemos escribir el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales como el par ordenado:

$$\mathrm{S} = \{(10h; 340km)\}$$

Ejemplo 23: *Otros dos amigos han decidido que el día era lo suficientemente lindo como para encontrarse con nosotros. El primero de ellos, Juan, no tiene auto, así que se toma un micro en la terminal, que está en el kilómetro* 0 *de la ruta, a las* $7{:}00\ AM$, *y viaja hasta nuestro destino a una velocidad constante de* $80\ km/h$. *El segundo, Daniel, sale del kilómetro* 220 *también a* $80\ km/h$, *a las* $8{:}30\ AM$. *¿Nos encontraremos en el camino?*

El planteo es similar al anterior, así que veamos:

Encuentro con Juan:

$$\begin{cases} x_e = 180km + 80\frac{km}{h} \cdot (t_e - 8h) \\ x_e = 0km + 80\frac{km}{h} \cdot (t_e - 7h) \end{cases}$$

$$180km + 80\frac{km}{h} \cdot (t_e - 8h) = 80\frac{km}{h} \cdot (t_e - 7h)$$

$$180km + 80\frac{km}{h} \cdot t_e - 640km = 80\frac{km}{h} \cdot t_e - 560km$$

$$\left(80\frac{km}{h} - 80\frac{km}{h}\right) \cdot t_e = -100km$$

$$\boxed{0\frac{km}{h}\cdot t_e = -100km}$$

Como vimos anteriormente, no existe ningún número real que multiplicado por cero nos dé como resultado -100. Por lo tanto, el conjunto solución del SEL es el conjunto vacío, por lo que el sistema es incompatible.

$$\boxed{S = \emptyset}$$

Esto implica que no nos encontraremos en ningún momento durante nuestro viaje con Juan.

Encuentro con Daniel:

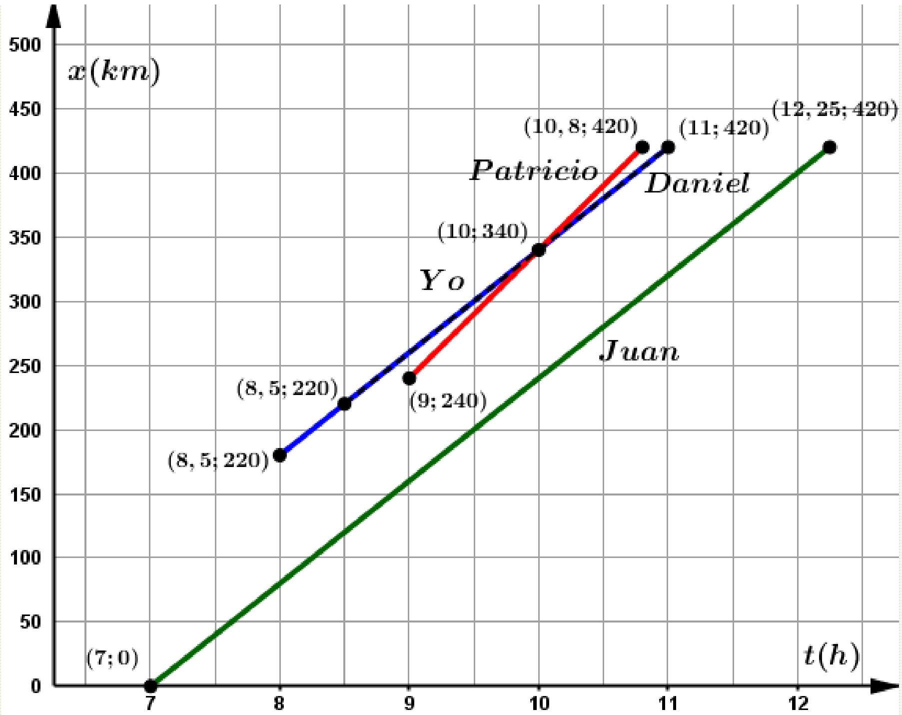
$$\begin{cases} x_e = 180km + 80\frac{km}{h}\cdot(t_e - 8h) \\ x_e = 220km + 80\frac{km}{h}\cdot(t_e - 8{,}5h) \end{cases}$$

$$180km + 80\frac{km}{h}\cdot(t_e - 8h) = 220km + 80\frac{km}{h}\cdot(t_e - 8{,}5h)$$
$$180km + 80\frac{km}{h}\cdot t_e - 640km = 220km + 80\frac{km}{h}\cdot t_e - 680km$$
$$\left(80\frac{km}{h} - 80\frac{km}{h}\right)\cdot t_e = 0km$$
$$\boxed{0\frac{km}{h}\cdot t_e = 0km}$$

Existen infinitos valores reales que puede tomar t_e que satisfacen la última ecuación. Es decir que estamos ante un sistema compatible indeterminado.

Para el problema físico en particular que estamos estudiando, este resultado quiere decir que nos encontraremos en todo el trayecto desde que Daniel emprende el viaje, a las $8{:}30\ AM$, en el *kilómetro* 220, hasta que ambos llegamos a nuestro destino a las $11{:}00\ AM$ en el *kilómetro* 420.

Si graficamos los segmentos de rectas que representan la relación entre la posición y el tiempo para cada uno de los tres casos de encuentro, nos queda:



Gráficamente, para el sistema compatible determinado, los segmentos se cruzan en un único punto, para el sistema incompatible son paralelos, mientras que para el sistema compatible determinado, los segmentos son coincidentes.

2.5. Actividades del capítulo

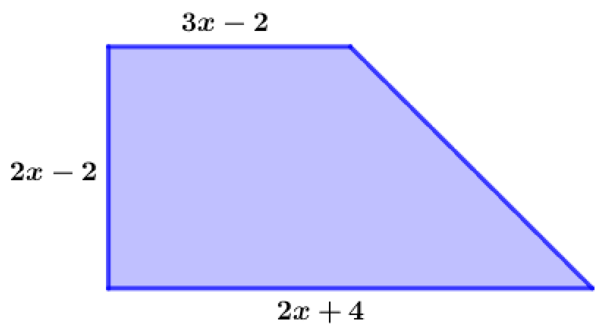
1. Encontrar, de ser posible, todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que las siguientes ecuaciones tengan como solución a $x = 2$.
   (a) $\frac{3}{4}x - 2 + \frac{1}{2}x = a - \frac{1}{4}$
   (b) $\frac{1}{2}x^2 - 6 + ax = -x^2 + 9$

2. Indicar para cada ítem la opción correcta, justificando debidamente.
   (a) El 30% de un número sumado con su triple se expresa:
   i) $3x$ ii) $3{,}3\,x$ iii) $33x$ iv) $303x$
   (b) Sabiendo que un poste tiene la octava parte de su longitud bajo tierra, las dos séptimas partes del resto bajo agua y sobresalen 2,5 m. La longitud del poste será:
   i) $3\,m$ ii) $3{,}5\,m$ iii) $4m$ iv) $5m$

3. Tres socios se reparten ganancias por un total de \$45000. Si al primero le corresponde la mitad de lo que le corresponde al segundo y al tercero, el triple de lo que le corresponde al segundo. ¿Cuánto dinero recibirá cada uno?

4. Si un padre y su hijo tiene 32 años y 11 años, respectivamente. ¿Cuántos años deberán pasar para que la edad del padre duplique la edad del hijo?

5. Hallar el perímetro del siguiente trapecio sabiendo que su área es de 34 m^2:



6. Determinar cuánto mide el lado de un cuadrado, si al duplicar su lado, el área aumenta en 147 cm^2.

7. Indicar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la ecuación $3x^2 - ax + 3$ tiene dos soluciones reales distintas, una solución real o ninguna solución real.

8. Determinar la ecuación de segundo grado que tiene:
   (a) solución 3 y -1 y coeficiente cuadrático -1.
   (b) única solución $-\frac{1}{4}$ y coeficiente cuadrático 2.

9. Calcular la edad de Silvina, sabiendo que dentro de 11 años tendrá la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años.

10. Si disminuimos en 1 cm cada lado de un rectángulo que tiene por base el triple que su altura, el área inicial disminuye en 15 cm^2. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo inicial?

11. Resolver las siguientes ecuaciones, verificando los resultados obtenidos.

(a) $(x^2-16)(x-6)=0$ (b) $\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)\left(\sqrt{5}x+3\sqrt{5}\right)=0$

(c) $x^2(x^2-64)(x+10)=0$ (d) $\left(\frac{2x-1}{3}-\frac{3x-1}{4}\right)\left(\frac{x-1}{2}-\frac{4-x}{4}\right)=0$

(e) $\frac{7}{x-2}+\frac{8}{x-5}=3$ (f) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{x-3}{x-1}=1$

(g) $\frac{5}{1-x^2}=\frac{7}{x-1}+\frac{1}{1+x}$ (h) $\frac{2x^2+7x-4}{x^2+x-2}=0$

(i) $\frac{2x^3-8x^2-10x}{2x^3-50x}=0$ (j) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2=6-\frac{x+1}{x-1}$

12. Aplicando propiedades de los logaritmos, reducir a la mínima expresión.
   (a) $log(x-3)-log(x+3)-log(x)=$
   (b) $2log(x)-\frac{3}{2}log(y)=$
   (c) $\frac{1}{2}log\left(\frac{x}{y^2}\right)+\frac{1}{2}log\left(\frac{x^2y}{2}\right)=$

13. Resolver las siguientes ecuaciones, verificar la solución y escribir el conjunto solución.

(a) $2^{x-1}=4$ (b) $\log_2(x-2)=-1$

(c) $6^{-3x}=\frac{1}{36}$ (d) $\log_x 625=4$

(e) $\log_2(x+1)-\log_2(2x-7)=3$ (f) $2^x-8^{x-2}=0$

(g) $(\log_2 x)^2-\log_2 x=2$ (h) $3^{2x-2}+3^{x-1}=12$

14. Hallar los valores de h y k tales que se cumpla la siguiente igualdad:

$$log_2(8h + 20k) - log_2 4 = 1$$

Sabiendo además que $h + k = -2$

15. Hallar la ecuación de una circunferencia que tiene centro en el punto $C(-2; 1)$ y diámetro 10.

16. Determinar el centro y el radio de las siguientes circunferencias. Representar gráficamente.
    (a) $x^2 + y^2 + 4y - 12 = 0$
    (b) $x^2 - 2x + y^2 + 2y = 7$
    (c) $x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0$
    (d) $x^2 - x + y^2 = 0$
    (e) $(x - 1)^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$

17. Hallar todos los valores de $x \in [0; 2\pi]$ que verifiquen las siguientes igualdades:
    (a) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$
    (b) $7 \tan x = 2\sqrt{3} + \tan x$
    (c) $-3 \sin x + \cos^2 x = 3$
    (d) $\sin 2x - \sin x = 0$
    (e) $\tan x + 2 \sin x = 0$
    (f) $2 \cos x + \sin 2x = 0$
    (g) $2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \tan x = 0$

18. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y clasificarlos según el conjunto solución:

    (a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -2x + 4y = -12 \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -3x + 3y = 5 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -2x + 3y = 4 \end{cases}$

    (e) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -2x + 6y = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$

19. Galileo tiene el doble de edad de Brisa y hace 5 años, la edad de Galileo era el triple de la edad de Brisa. ¿Cuántos años tienen ahora cada uno?

20. En una empresa trabajan 600 personas. Usan Iphone el 16% de los hombres y el 20% de las mujeres. Si el número total de personas que utilizan Iphone es 110, ¿cuántas de ellos son hombres y cuántas mujeres?

21. El dueño de una casa de compra-venta de artículos usados, paga por dos candelabros \$2250 y los pone a la venta a \$3150. Si obtuvo una ganancia del 25% sobre el precio de compra del primero y del 50% sobre el segundo, ¿Cuánto pagó por cada candelabro?

22. Si en un rectángulo, la base y la altura difieren en 3 cm y su perímetro es de 26 cm. ¿Cuáles son sus dimensiones?

23. Se produce un disparo a 2 km de donde se encuentra un policía, ¿cuánto tarda el policía en oírlo si la velocidad del sonido en el aire es de 330 m/s?

24. Un auto parte del reposo. A los 5 segundos alcanza una velocidad de 90 km/h. Si su aceleración es constante, calcular:
    (a) La aceleración.
    (b) La distancia recorrida en esos 5 segundos.
    (c) La velocidad que tendrá a los 11 segundos.

25. Dos ciudades A y B distan 300 km entre sí. A las 9 de la mañana parte de la ciudad A un coche hacia la ciudad B con una velocidad constante de 90 km/h, y de la ciudad B parte otro hacia la ciudad A con una velocidad constante de 60 km/h. Se pide:
    (a) El tiempo que tardarán en encontrarse.
    (b) La hora del encuentro.
    (c) La distancia recorrida por cada uno.

26. Un coche sale de la ciudad A a la velocidad de 90 km/h. Tres horas más tarde sale de la misma ciudad otro coche en persecución del primero con una velocidad de 120 km/h. Se pide:
    (a) El tiempo que tardará en alcanzarlo.
    (b) La distancia, de A, a la que se produce el encuentro.

27. Se tira una bolita A con una velocidad de 10 m/s y en el mismo momento, pero, 5 m más adelante, se tira una bolita B con una velocidad de 8 m/s.
    (a) ¿Cuánto tiempo después la bolita A pasa a la B?
    (b) ¿A qué distancia de la posición inicial, de la bolita B, se produce el encuentro?

28. En el semáforo de una avenida de doble mano se cruzan un colectivo con una velocidad constante de $40\,km/h$ y un camión con una velocidad constante de $45\,km/h$. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que se encuentren a 30 cuadras de distancia uno del otro?

29. Dos ciclistas pasan al mismo tiempo por un punto con velocidades constantes: $30\,km/h$ y $15\,km/h$. ¿Qué distancia los separará luego de 2 minutos?

30. Sale un avión de A hacia B con una velocidad constante de $500\,km/h$, al mismo tiempo otro avión con la misma dirección, pero en sentido contrario despega con velocidad constante de $300\,km/h$. Si los puntos A y B están separados $1000\,km$, calcular:
    (a) ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse?
    (b) ¿A qué distancia de la posición inicial de A lo lograrán?

31. Un barco zarpa de A con destino a B con una velocidad de $80\,km/h$. Luego de 3 horas, otro sale de B con el mismo sentido que el primero, con una velocidad de $50\,km/h$. Si la distancia entre A y B es de $500\,km$, calcular:
    (a) ¿Cuánto tiempo después, de haber zarpado B, se producirá el encuentro?
    (b) ¿A qué distancia de la posición inicial de B?

3. Funciones

3.1. Introducción

Las funciones cumplen un lugar muy importante dentro de la Matemática. Las funciones sirven para describir fenómenos de distintas ciencias o, simplemente, para expresar relaciones matemáticas.
La introducción de la noción de cambio, la cuantificación de la causalidad en la determinación de un efecto era algo para lo que la Matemática no estuvo suficientemente madura, sino recién después de muchos siglos. El proceso de elaboración del concepto de función fue largo. Varios historiadores de las ciencias consideran que los matemáticos babilonios poseyeron un verdadero instinto de funcionalidad, dado que en las tablas de cálculo que construyeron está presente una relación general por la que se asocian elementos de dos conjuntos. Sin embargo, existe una distancia muy grande entre "instinto de funcionalidad" y la noción de función.
En el siglo XIV, Nicolás Oresme, utilizó un método gráfico para representar los cambios y así describirlos y compararlos. Es en el siglo XVII cuando aparece explícitamente con Leibniz el concepto de función en 1692, y es utilizado por Bernoulli desde 1694. Finalmente, fue Euler en 1734 quien introdujo el símbolo $f(x)$.
Las funciones más empleadas, son las que están compuestas por variables reales, es decir aquellas definidas sobre números reales cuyos valores son también números reales.
Su estudio constituye la armazón de toda la Matemática actual y, por ende, de toda la ciencia y tecnología moderna. Estas funciones van a constituir el objeto de estudio de este capítulo.

En capítulos anteriores abordamos el estudio de las expresiones algebraicas y las ecuaciones, sin que esto indique que estamos priorizando una forma de resolver por sobre otra, sino que proponemos ir ampliando la mirada. Algunos problemas resultan más sencillos resolverlos algebraicamente mientras que otros lo son desde un marco funcional. Todas las miradas enriquecen.

Muchas veces, el soporte gráfico permite elaborar conjeturas mientras que el trabajo algebraico permite corroborarlas o desecharlas, otorgando validez a las respuestas desde el mismo conocimiento matemático.

El concepto de función es un muy buen instrumento para expresar el cambio que se produce en las cosas al pasar el tiempo, veamos un ejemplo.

Ejemplo1: *Dejamos caer una piedra desde la terraza de un edificio de 245 m, tomando las precauciones necesarias para no lastimar a nadie. En la siguiente tabla, hemos registrado la distancia recorrida por la piedra en distintos tiempos:*

Tiempo (en segundos)	0	1	2	3	4	5
Distancia (en metros)	0	-5	-20	-45	-80	-125

¿Cómo podemos interpretar las distancias negativas? ¿Observamos alguna regularidad o regla en la tabla? ¿Cuál será la fórmula que se ajusta a esta tabla? ¿En cuánto tiempo llegará la piedra al suelo?

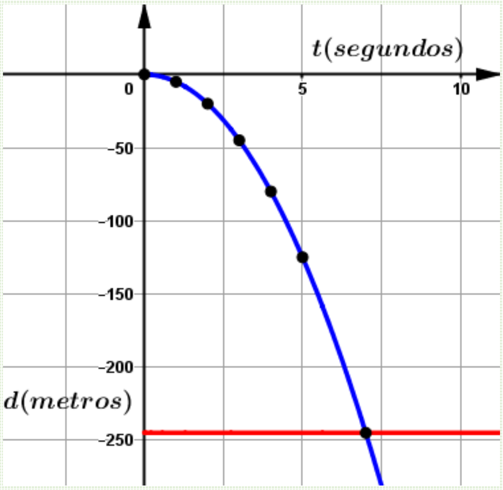
La distancia desde la terraza está relacionada con los distintos tiempos. Es decir, a cada tiempo le corresponde una distancia. Podemos ver en la tabla que se ha decidido considerar las distancias recorridas, por la piedra que cae, negativas.

Notemos que todas las distancias, en valor absoluto, son números múltiplos de 5. Además, los números que multiplican a -5 son los cuadrados de los tiempos. Entonces, la fórmula que se ajusta es:

$$d(t) = -5t^2$$

A continuación, representemos gráficamente los valores de la tabla y de la función obtenida:

Tiempo	Distancia
0	0
1	$-5 \cdot 1^2 = -5$
2	$-5 \cdot 2^2 = -20$
3	$-5 \cdot 3^2 = -45$
4	$-5 \cdot 4^2 = -80$
5	$-5 \cdot 5^2 = -125$



Para responder la última pregunta, hemos trazado una recta simulando el suelo, que pasa por $-245\ m$ que corresponde al tiempo de 7 segundos, pero ¿es exactamente ese valor? Podemos responder esta pregunta si igualamos la fórmula que obtuvimos a -245 y resolvemos la ecuación

$$-245 = -5 \cdot t^2$$
$$\frac{-245}{-5} = 49 = t^2$$

Ya que el tiempo es positivo, entonces

$$\boxed{\boldsymbol{t = 7}}$$

Es decir, la piedra llegará al suelo a los 7 segundos y habiendo recorrido 245 metros.

En el ejemplo anterior intervinieron dos ***variables***: el tiempo (t) y la distancia (d).
La función relaciona la segunda variable (distancia) con la primera (tiempo), pues al pasar el tiempo se modifica la distancia.
Para la representación gráfica empleamos un sistema de ejes cartesianos, utilizando una escala adecuada:

- *El tiempo, t, se ha representado en el eje horizontal y en él cada unidad representa* $5\ s$.
- *La distancia, d, se ha representado en el eje vertical y cada unidad significa* $20\ m$.

Es importante señalar que en cada instante la piedra está en un único lugar.

Generalizando:

Una función relaciona dos variables, habitualmente designadas por x e y siendo ambas variables numéricas.

Para que una relación de este tipo pueda ser considerada una función, debe ocurrir que a cada valor de x le corresponda un único valor de y.

La forma simbólica de expresar una función es:

$$y = f(x)$$

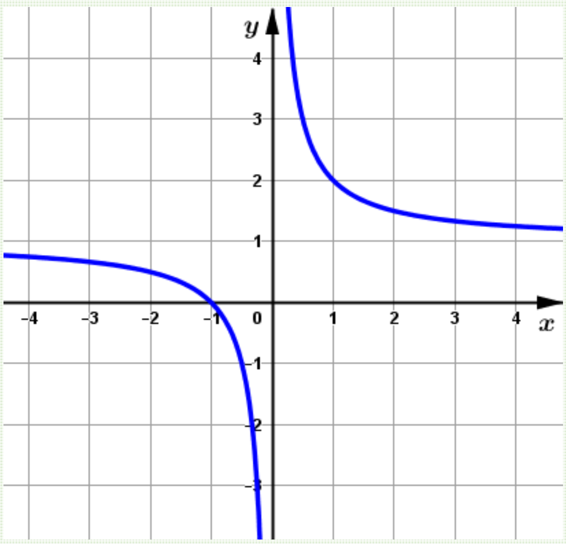
Es decir, a una función numérica se la define mediante tres elementos:

- *Un conjunto de números A.*
- *Otro conjunto de números B.*
- *Una asignación que a todo número del conjunto A le hace corresponder un único número del conjunto B.*

El modo de asignación es lo más importante y puede venir dado de muchas formas: por una tabla de valores, por un gráfico, por una fórmula, por un enunciado o por un diagrama.

¿Por qué decimos que son necesarios los tres elementos? Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2: *Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y el siguiente gráfico:*



¿f es una función?

Como los conjuntos A y B son $\mathbb{R}$, para $x = 0$ no hay valor asignado de y. Es decir, no se cumple con la condición de existencia. Recordemos que para que sea función todos los números reales x ,pertenecientes a A, tienen que relacionarse con un único número real y.

¿Y si sacamos el cero del conjunto A, es decir, A es $\mathbb{R}-\{0\}$?
Ahora sí sería función, ya que nos aseguramos de que a todo elemento de A le corresponde un único elemento de B. A este nuevo conjunto se lo llama dominio de la función.

3.1.1. Dominio, codominio e imagen de una función

Dominio:

Es el conjunto de todos los valores que pertenecen a A, para los cuales la función está definida. Se escribe $Dom(f)$.

Codominio:

Es el conjunto de todos los valores que pueden ser asignados por la función, también se llama conjunto de llegada. Se denota $Codom(f)$

Para definir a una función f, se debe indicar el dominio y codominio, en forma simbólica lo expresamos,

$$f: A \to B$$

Imagen:

Es el conjunto formado por todos los valores del codominio, para los cuales existe un x en A. Se simboliza $Im\,(f)$.

Simbólicamente, el conjunto imagen de la función f con dominio A y codominio B, es el conjunto:

$$Im(f) = \{y = f(x)/x \in A\} \subseteq B$$

Observemos que la notación anterior nos indica que la imagen es un subconjunto incluido en el codominio de la función (lo cual queda expresado con la aclaración "$\subseteq B$").
En el ejemplo 2 tenemos que,

$$Im(f) = \mathbb{R}-\{1\}$$

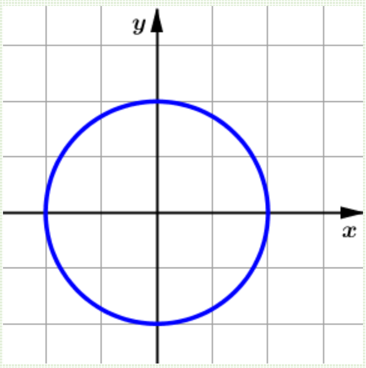
¿Por qué la imagen del ejemplo 2 está constituida por todos los números reales excepto el 1?

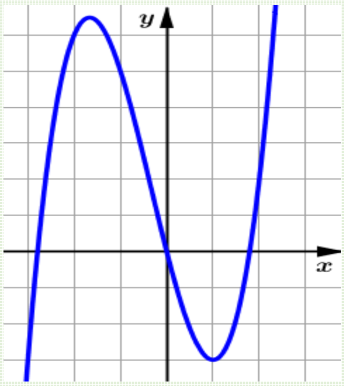
3.1.2. Gráfico de una función

La representación gráfica de una función se realiza mediante la utilización de un sistema de ejes cartesianos.
Al eje horizontal, ***eje de abscisas***, se lo suele designar con la letra x; al vertical, ***eje ordenadas,*** con la letra y. En cada eje designamos escalas apropiadas.
Cada punto de la gráfica corresponde a un par de valores: un valor de x (***variable independiente***) y el correspondiente valor de y (***variable dependiente***).
Como a cada valor de x le debe corresponder uno solo de y, cuando tenemos gráficos de funciones podemos utilizar la ***prueba de la recta vertical***:

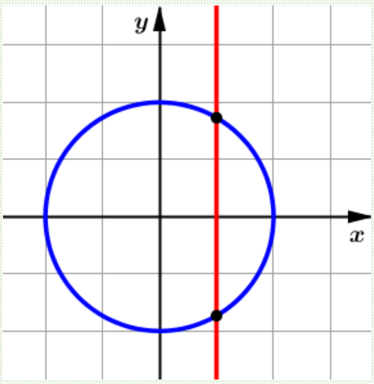
Una curva en el plano es el gráfico de una función si y solo si ninguna recta vertical se interseca con la curva más de una vez.

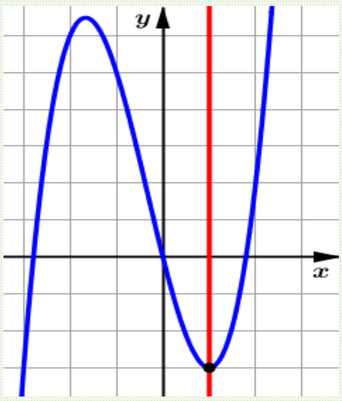
Ejemplo 3: *Sea* $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
¿Corresponden los siguientes gráficos a funciones?





Veamos si los gráficos pasan la prueba de la recta vertical.

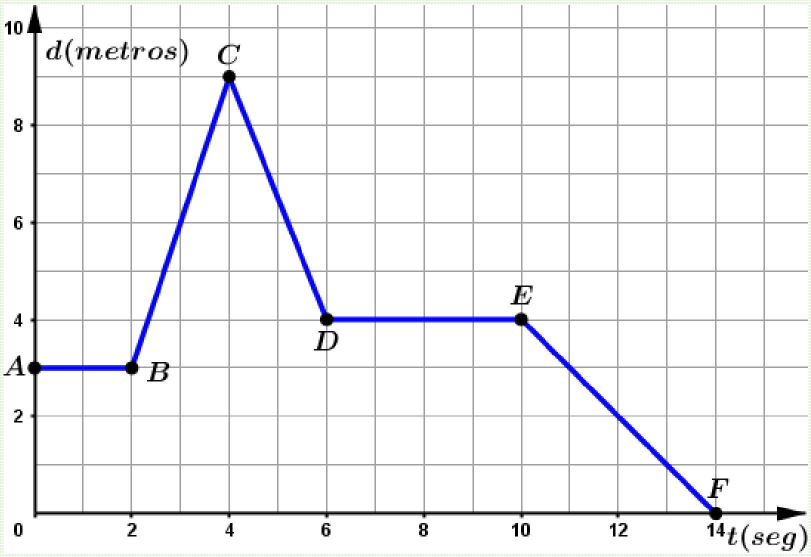




La primera gráfica no corresponde a una función, ya que para un valor de x hay dos de y. Es decir, hay por lo menos una recta vertical que interseca a la curva más de una vez.

La segunda gráfica corresponde a una función, porque para cada valor de x hay un único valor de y, ya que ninguna recta vertical interseca a la curva más de una vez.

Ejemplo 4: *La trayectoria de un automóvil que se desplaza con un movimiento rectilíneo y a velocidad constante (en cada tramo), se muestra en la gráfica. En el eje horizontal se expresa el tiempo, medido en segundos, que emplea el móvil en cada tramo, y en el eje vertical la distancia, expresada en metros, que tiene respecto a un observador que se encuentra en la misma línea recta del movimiento.*



Analizando la gráfica responder las siguientes cuestiones:

(a) *¿Para qué tiempos el automóvil tiene desplazamiento nulo? ¿Es única la respuesta?*

El automóvil está detenido, no se desplaza, los primeros 2 segundos y entre los 6 y 10 segundos.

(b) *¿Qué se puede afirmar si tomamos los puntos de la trayectoria correspondientes a los 2 s y 6 s?*

A los 2 segundos arranca y a los 6 segundos se detiene.

(c) *Escribir los puntos de la trayectoria que corresponden a los tiempos: 0 s, 4 s y 8 s.*

Al iniciar el movimiento se encuentra a 3 metros del observador (punto A), a los 4 segundos se encuentra a 9 metros (punto C) y a los 8 segundos está a 4 metros (en el punto medio del segmento $\overline{DE}$) .

(d) ¿Cuál es la distancia recorrida entre los puntos A y C de la trayectoria? ¿y entre A y F?

La distancia recorrida entre los puntos A y C es de 6 metros. Y entre A y F el automóvil recorrió 11 metros.

(e) Realizar una explicación de cuál es el recorrido del automóvil según la mirada del observador.

El automóvil está quieto por 2 segundos, 3 metros adelante del observador. Luego, avanza 6 metros durante 2 segundos en línea recta. Retrocede 5 metros, en otros 2 segundos y se queda quieto 4 segundos. Finalmente retrocede 4 metros, llegando a la posición final, a los 4 segundos de iniciado el retroceso.

(f) Redactar una explicación de cuál es el recorrido del automóvil según la mirada de un integrante del equipo técnico que se queda en el punto de partida.

El automóvil está quieto por 2 segundos. luego avanza 6 metros en línea recta durante 2 segundos. Retrocede 5 metros en 2 segundos, se queda en esa posición 4 segundos y finalmente retrocede por 4 segundos, quedando 3 metros detrás.

(g) Sabiendo que la velocidad media de un móvil entre un punto inicial y un punto final se define como:

$$Rapidez\ media = \frac{espacio\ total\ recorrido}{tiempo\ total\ empleado}$$

¿Cuál es la rapidez media entre los puntos B y C de la trayectoria? ¿Cuál es la rapidez media del automóvil a lo largo de su trayectoria completa?

La rapidez media entre los puntos B y C de la trayectoria la calculamos de la siguiente manera,

$$\frac{6m}{2s} = \boxed{\mathbf{3}\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}}$$

La rapidez media del automóvil a lo largo de su trayectoria completa es de,

$$\frac{15m}{14s} = \boxed{\mathbf{1,07}\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}}$$

A continuación, analizaremos una serie de ejemplos relacionados a la imagen de una función.

Ejemplo 5: *Dada la función*

$$f: A \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

Calcular la imagen de $x = 1$ *,* $x = -2$ *y* $x = 3$

Según la definición de imagen, para calcular $f(1)$, $f(-2)$ y $f(3)$ simplemente basta con evaluar la función en los valores indicados.

$$f(1) = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1 - 3} = \frac{3}{-2} = \boxed{-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}$$

$$f(-2) = \frac{2 \cdot (-2) + 1}{-2 - 3} = \frac{-3}{-5} = \boxed{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}}$$

$$f(3) = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3 - 3} = \nexists$$

Este último caso es un absurdo. Recordemos que la división por cero no está definida, por lo tanto, no es posible evaluar la función en $x = 3$, entonces no existe $f(3)$.

En el ejemplo anterior vimos que no existe $f(3)$, ¿qué se puede decir de $x = 3$ respecto del dominio de f?

Ejemplo 6: *¿Cuáles de las siguientes fórmulas representan funciones de* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*? Si no lo son, hallar un dominio adecuado para que lo sean.*

$$f(x) = \frac{3}{x^2+25} \qquad g(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}$$

$$h(x) = \sqrt[3]{x-8} \qquad j(x) = \sqrt{20-5x}$$

Para hallar un dominio adecuado tenemos que analizar que se puedan realizar las operaciones indicadas por la expresión algebraica, que define a la función. Recordemos que para todos los valores del dominio debe haber un único valor asignado por la expresión de la función.

Hay que tener en cuenta las operaciones que **NO** se pueden hacer:

- *Dividir por cero.*
- *Calcular la raíz de índice par a número negativos.*

Para la función $f(x)$, al ser una función definida a partir de una expresión algebraica fraccionaria, debemos analizar para que valores $x^2 + 25$ es cero. Es decir, resolvemos la ecuación

$$x^2 + 25 = 0$$

buscando los valores que debemos descartar del conjunto de los números reales.
Esta ecuación no tiene solución, ya que al ser una adición de dos cuadrados nunca tendrá como resultado cero. Entonces, al no existir valores que anulen el denominador,

$$\boxed{\boldsymbol{Dom(f)} = \mathbb{R}}$$

De la misma manera para $g(x)$, analizamos para que valores

$$x^2 - 4 = 0$$

es decir, con $x = 2$ o $x = -2$ el denominador será cero, por lo tanto, esos valores no podrán estar en el dominio. Entonces,

$$\boxed{\boldsymbol{Dom(g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}}}$$

En el caso de $h(x)$, al ser una raíz de índice impar se puede calcular para cualquier valor real.

$$\boxed{\boldsymbol{Dom(h)} = \mathbb{R}}$$

Contrariamente, $j(x)$ es una raíz cuadrada por lo que el radicando debe ser un número mayor o igual a cero. Es decir

$$20 - 5x \geq 0$$

Resolviendo la inecuación nos queda

$$20 \geq 5x$$
$$x \leq 4$$

Por lo tanto, el dominio de $j(x)$ queda definido como,

$$\boxed{\boldsymbol{Dom(j) = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\} = (-\infty;\ 4]}}$$

3.1.3. Intersecciones con los ejes

Observemos la Figura 1

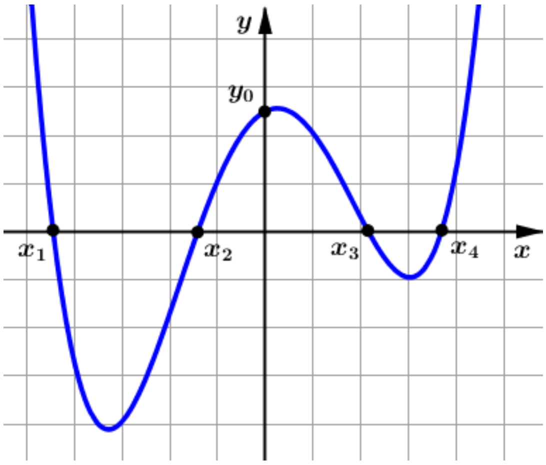


Figura 1

La intersección con el eje de ordenadas es en $y = y_0$, que es el valor de la función para $x = 0$. Es decir que la intersección con el eje y se determina evaluando $y = f(0)$.

Las intersecciones con el eje de abscisas se dan en $x = x_1,\ x = x_2,\ x = x_3,\ x = x_4$, que son los valores de x que hacen que la función valga cero. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación,

$$f(x) = 0$$

A estos valores se los denomina ***ceros o raíces de la función***.

Simbólicamente se define el conjunto de ceros de la función como:

$$C_0 = C^0 = \{\, x \in Dom(f) / f(x) = 0\}$$

Para la función de la Figura 1, $C_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

El ***conjunto de positividad*** está formado por todos los valores del dominio para los cuales la función toma valores positivos.

Simbólicamente se define el conjunto de positividad de la función como:

$$C_+ = C^+ = \{\, x \in Dom(f) / f(x) > 0\}$$

Para la función de la Figura 1, $C_+ = (-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3) \cup (x_4, +\infty)$
El ***conjunto de negatividad*** está formado por todos los valores para los cuales la función toma valores negativos.
Simbólicamente se define el conjunto de negatividad de la función como:

$$C_- = C^- = \{\, x \in Dom(f) / f(x) < 0\}$$

Para la función de la Figura 1, $C_- = (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4)$

Ejemplo 7: *Hallar los ceros y la intersección con el eje de ordenadas de las siguientes funciones:*
(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 7 - 21x$
Para hallar la intersección con el eje y, calculamos

$$y_0 = f(0) = 7 - 21 \cdot 0$$
$$y_0 = 7$$

Para hallar los ceros, resolvemos la ecuación

$$y = 0$$
$$7 - 21x = 0$$
$$x = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$
$$\boxed{\boldsymbol{C_0 = \left\{\frac{1}{3}\right\}}}$$

(b) $g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} / g(x) = \frac{9 - x^2}{x^2}$
No hay intersección con el eje y, pues x no puede valer cero $\big(0 \notin Dom\,(\mathrm{g})\big)$
(Importante: ¡¡La división por cero no está definida!!)
Para determinar las raíces, debemos resolver,

$$f(x) = 0$$

Si el resultado de una división es cero, entonces, el numerador debe serlo.

$$9 - x^2 = 0$$
$$9 = x^2$$
$$|x| = 3$$
$$x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$
$$\boxed{\boldsymbol{C_0 = \{-3; 3\}}}$$

3.2. Clasificación de Funciones

Uno de los problemas que aparece con frecuencia, cuando modelizamos con funciones alguna situación cotidiana, es la de averiguar si es posible que la función tome determinado valor. Por ejemplo, como ocurrió en el **Ejemplo 4** cuando quisimos averiguar si era posible tener un sueldo de $75000.
En esos casos estamos resolviendo la ecuación

$$f(x) = b$$

donde b es el dato y x debe pertenecer al dominio de la función.
Para que esta ecuación tenga solución, b debe pertenecer a la imagen de la función ya que en esta están todos los valores del codominio para los cuales existe un x en el dominio.

Si $Im\,(f) = Codom(f)$, la ecuación $f(x) = b$ siempre tiene solución y en ese caso diremos que la función es ***sobreyectiva***. En forma simbólica,

$$f \text{ es sobreyectiva } \Leftrightarrow \ Im\,(f) \ = \ Codom\,(f)$$

Es decir, si todo elemento del codominio tiene por lo menos una preimagen. Decimos por lo menos una preimagen, por lo tanto, podría tener más de una. Por ejemplo, pensemos cuando buscamos raíces de un polinomio. En ese caso buscamos los valores de x para los cuales la función vale cero ($f(x) = 0$) y es muy común encontrar más de una raíz, es decir tenemos más de una preimagen para el valor cero.
Si pensamos ahora en la ecuación $f(x) = b$ con b un valor cualquiera del codominio y tiene solución única para todos los valores de x que pertenecen al dominio, diremos que la función es ***inyectiva*** y los elementos del codominio tienen, a lo sumo, una preimagen.
Gráficamente, notamos que una función es inyectiva cuando al trazar rectas horizontales éstas cortan al gráfico de f en, a lo sumo, un punto.
En esos casos se cumple que valores distintos del dominio siempre tienen valores distintos de imagen, es decir

$$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \ \forall x_1; x_2 \in Dom(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq \ f(x_2)$$

Si para cada $b \in Im(f)$, la ecuación $f(x) = b$ tiene solución única, diremos que la función es ***inyectiva*** y ***sobreyectiva*** por lo tanto, será **biyectiva**.

$$f \text{ es biyectiva } \Leftrightarrow \ f \text{ es sobreyectiva e inyectiva}$$

La importancia de la unicidad de la solución radica en que a cada $y \in Im(f)$ le podremos asignar un único valor de x que resuelve la ecuación $f(x) = y$. Esta asignación resulta ser una función que llamaremos ***función inversa***.

*Si $f: A \to B$ es biyectiva, llamamos **función inversa** de f a la función,*

$$f^{-1}: B \to A$$

tal que,

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

O sea, cada elemento de B se relaciona con su única preimagen.
Veamos una serie de ejemplos donde tiene sentido la función inversa:

Ejemplo 8: *La función $C(k) = k - 273$ relaciona la escala Kelvin (K) y la escala Celsius (C), donde k es la temperatura en grados Kelvin, y C la temperatura en grados Celsius. ¿Cuál es la temperatura en grados Kelvin correspondiente a 100 ° Celsius? ¿y a 0°Celsius? ¿Cuál sería el significado de C^{-1}?*

Para responder la primera pregunta podemos plantear $C(k) = 100$ y averiguar k es la temperatura en grados Kelvin correspondiente.

$$C(k) = 100$$
$$k - 273 = 100$$
$$k = 100 + 273 \implies \boxed{\boldsymbol{k = 373}}$$

Es decir, 373° Kelvin corresponden a 100° Celsius.
Ahora calculemos cuántos grados Kelvin se corresponden 0° Celsius, para eso igualemos a 0.

$$C(k) = 0$$
$$k - 273 = 0$$
$$\boxed{\boldsymbol{k = 273}}$$

Es decir, 273° Kelvin corresponden a 0° Celsius. Y así podríamos hacer para cualquier valor:

$$C(k) = k - 2 = \mathrm{c} \implies \boxed{\boldsymbol{k = (c + 273)}}$$

Para cada valor c de grados Celsius podríamos encontrar el correspondiente en grados Kelvin, haciendo $c + 273$. Es decir,

$$k = f^{-1}(c) = c + 273$$

Por lo tanto, f^{-1} nos da la temperatura en grados Kelvin a partir de la temperatura en grados Celsius.

Ejemplo 9: *El costo, en pesos, de producir q artículos se obtiene mediante la función*

$$C(q) = 100 + 2q$$

(a) Deducir la fórmula de la función inversa y explicar en términos prácticos su significado.

Como q representa la cantidad de artículos, debe ser positivo o cero.

$$\begin{aligned} q &\geq 0 \\ 2q &\geq 0 \\ 100 + 2q &\geq 0 + 100 \\ 100 + 2q &\geq 100 \\ \boxed{\boldsymbol{C \geq 100}} \end{aligned}$$

Entonces, podemos precisar el dominio y la imagen de la función C de las siguientes maneras:

$$Dom\,(C) = [0; +\infty) \qquad Im(C) = [100; +\infty)$$

Por lo tanto, la función queda definida como,

$$C: [0; +\infty) \implies [100; +\infty)$$

La cual es invertible y su inversa es $q(C)$. Para encontrarla, procedemos a despejar q,

$$\begin{aligned} C &= 100 + 2q \\ C - 100 &= 2q \end{aligned}$$

$$\boxed{\boldsymbol{q = \frac{C - 100}{2}}}$$

Luego, la inversa de $C(q)$ es

$$q: [100; +\infty) \to [0; +\infty) \;/\; q(C) = \frac{C - 100}{2}$$

Lo cual representa la cantidad de artículos producidos a un costo C.
En la función $C(q)$, la variable independiente es q y la variable dependiente es C. Mientras que en la función $C^{-1} = q(C)$ la variable independiente es C y la variable dependiente es q.

(b) Calcular $C(300)$ y $C^{-1}(400)$.
(c) Explicar el significado de los valores hallados en la parte (b).
Si calculamos,

$$C(300) = 100 + 2 \cdot 300 \Rightarrow \boxed{\mathbf{C(300) = 700}}$$

significa que la producción de 300 artículos tiene un costo de \$700.
En cambio, cuando hacemos,

$$C^{-1}(400) = q(400) = \frac{400 - 100}{2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{C^{-1}(400) = 150}}$$

Su interpretación es que un costo de \$400 corresponde a la producción de 150 artículos.

3.3. Composición de funciones

Como ya vimos, la función $C(k) = k - 273$ relaciona la escala Kelvin (K) y la escala Celsius (C), donde k es la temperatura en grados Kelvin, y $C(k)$ la temperatura en grados Celsius.
Por otro lado, la función $F(c) = 1{,}8c + 32$ expresa la temperatura en grados Fahrenheit (°F) si c es la temperatura en grados Celsius.
¿A qué temperatura en la escala Fahrenheit corresponden $290\,K$? Con los datos anteriores, ¿es posible obtener una fórmula directa para relacionar la escala Kelvin y la escala Fahrenheit sin necesidad de pasar cada vez por la escala Celsius?

Respecto a la primera pregunta, nos piden expresar una temperatura en grados Kelvin en la escala Fahrenheit. El problema está en que ninguna de las fórmulas de las funciones nos permite calcular directamente lo pedido. Lo que sí se puede hacer es lo siguiente:

Calcular la temperatura en grados Celsius usando la función f, es decir, determinar

$$C(290) = 290 - 273 \implies \boxed{C(290) = 17}$$

Esto quiere decir que 290 °K es equivalente a 17°C.
Ahora bien, se puede usar la función F, ya que relaciona la escala Celsius-Fahrenheit. Para calcular $g(17)$, hacemos,

$$F(17) = 1{,}8 \cdot 17 + 32 \implies \boxed{F(17) = 62{,}6}$$

lo cual significa que 17 °C es equivalente a 62,6°F.
Pasemos ahora a analizar lo solicitado en el ítem (b): se pide, si es posible, hallar una fórmula que relacione directamente la escala Kelvin-Fahrenheit. Sigamos el siguiente recorrido:

$$k\ es\ la\ temperatura\ en\ K \xrightarrow{se\ aplica\ C} C(k) \xrightarrow{se\ aplica\ F} F\big(C(k)\big)$$

Si lo pensamos desde la fórmula sería así:

$$F\big(C(k)\big) = F(k - 273)$$
$$F\big(C(k)\big) = 1{,}8 \cdot (x - 273) + 32$$
$$F\big(C(k)\big) = 1{,}8k - 1{,}8 \cdot 273 + 32$$
$$F\big(C(k)\big) = 1{,}8x - 459{,}4$$

Como podemos observar, para contestar lo pedido, primero aplicamos la función C y luego la función F, esto es lo que en Matemática se denomina ***composición de funciones***. Pasemos a definirlo formalmente:

Sean $f: A \to B$ y $g: C \to D$ dos funciones. Se define la función g compuesta con f y se denota $g \circ f$ a la función

$$g \circ f: A \to D$$

definida por:

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$$

Siempre que

$$Im(f) \subseteq Dom(g)$$

La última condición es muy importante a la hora de componer funciones. A continuación, veremos dos ejemplos para aclarar esta cuestión.

Ejemplo 10: *Sean*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/ f(x) = 5x + 3$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/g(x) = 2x^3$$

Hallar las funciones compuestas $f \circ g$ *y* $g \circ f$.

Pasemos a realizar la primera composición solicitada,

$$f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$$
$$f\big(g(x)\big) = f(2x^3)$$
$$f\big(g(x)\big) = 5(2x^3) + 3$$
$$f\big(g(x)\big) = 10x^3 + 3 \implies \boxed{\boldsymbol{f \circ g(x) = 10x^3 + 3}}$$

En el caso de la segunda composición solicitada,

$$g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$$
$$g\big(f(x)\big) = g(5x + 3)$$
$$g\big(f(x)\big) = 2(5x + 3)^3$$
$$g\big(f(x)\big) = 2 \cdot (125x^3 + 3 \cdot 25x^2 \cdot 3 + 3 \cdot 5x \cdot 9 + 27)$$
$$\boxed{\boldsymbol{g \circ f(x) = 250x^3 + 450x^2 + 270x + 54}}$$

Observemos que $f \circ g$ y $g \circ f$ son funciones diferentes.

Ejemplo 11: *Sean*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = 2x + 3$$
$$g\colon [0; +\infty) \to \mathbb{R}/g(x) = \sqrt{x}$$

Hallar $g \circ f(x)$

Observemos la siguiente situación,

$$x = -9 \implies f(-9) = 2(-9) + 3 = -18 + 3 = -15$$

por lo tanto, cuando buscamos la imagen de éste a través de g, resulta

$$g\big(f(-9)\big) = g(-15) = \sqrt{-15} \notin \mathbb{R}$$

Podemos decir, entonces, que $g \circ f(x)$ no existe.

De este último ejemplo deducimos que no siempre es posible componer dos funciones.

Para que sea posible realizar la composición, los elementos de la imagen de la primera función deben pertenecer al dominio de la segunda. De ser necesaria la función compuesta, deberemos *redefinir* los dominios e imágenes.
En el ejemplo 12 deberíamos pedir que $2x + 3 \geq 0$ es decir trabajar con,

$$Dom(f) = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

para lograr que

$$Im(f) = Dom(g) = [0; +\infty)$$

Y ahora sí $g \circ f(x)$ queda definida como

$$g \circ f\colon \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right) \Rightarrow \mathbb{R} \,/ g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x+3) = \sqrt{2x+3}$$

3.4. Función lineal

> *Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una **función lineal** si su expresión es de la forma:*
>
> $$f(x) = mx + b$$
>
> *donde m y b son números reales fijos.*

El gráfico de toda función lineal es la recta de ecuación $y = mx + b$.
Al número m se lo llama ***pendiente de la recta*** y el número b es la ***ordenada al origen***.
Pasemos a analizar estos parámetros y que función cumplen:
Si $f(x) = mx + b$, entonces la imagen del 0 queda definida como

$$f(0) = m \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b$$

Luego, el punto de coordenadas $(0; b)$ se encuentra en la intersección de la gráfica f con el eje de ordenadas, como se muestra en la Figura 2. Es por eso que b recibe el nombre de *ordenada al origen*.

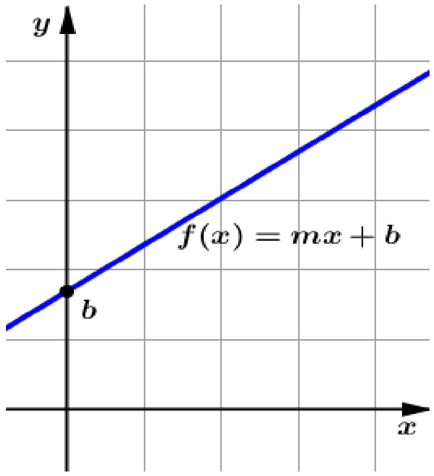


Figura 2

Consideremos ahora dos valores cualesquiera del dominio de $f(x) = mx + b$, por ejemplo x_1 y x_2, con la condición $x_1 \neq x_2$.
Entonces

$$y_1 = f(x_1) = m \cdot x_1 + b$$
$$y_2 = f(x_2) = m \cdot x_2 + b$$

Realicemos un estudio sobre la variación de la función sobre el intervalo $[x_1; x_2]$, como lo podemos observar en la Figura 3.

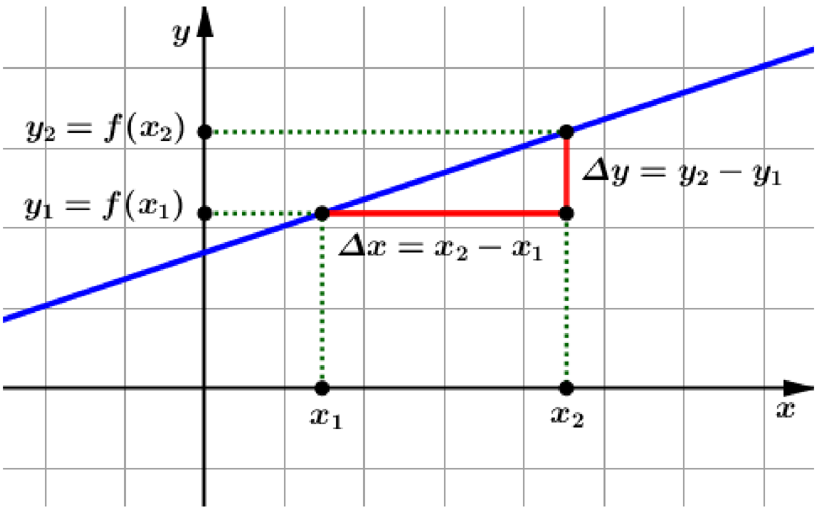


Figura 3

La variación de la variable dependiente y es

$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$
$$\Delta y = (m \cdot x_2 + b) - (m \cdot x_1 + b)$$
$$\Delta y = m.x_2 + b - m.x_1 - b$$

$$\Delta y = m \cdot x_2 - m \cdot x_1$$

$$\boxed{\Delta y = m.(x_2 - x_1)}$$

La variación de la variable independiente x es

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Finalmente, la variación de y por cada unidad de x se puede calcular de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{m.(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

Vemos que m es una constante que no depende de los valores de x considerados. Representa la variación de la variable dependiente por unidad de la variable independiente. Es decir,

$$m = \frac{\text{variación de la variable dependiente}}{\text{variación de la variable independiente}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

En términos gráficos, m es la ***pendiente*** de la función lineal $f(x) = m.x + b$

A la hora de la aplicación podemos decir que un fenómeno se dice lineal si se puede modelizar mediante una función lineal.

Teniendo en cuenta lo analizado hasta el momento, la característica fundamental de los fenómenos lineales es que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{es constante}$$

$\forall x_1, x_2 \text{ con } x_1 \neq x_2$

A modo de resumen, pasemos a nombrar algunas propiedades que tienen las funciones lineales:

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/ m \cdot x + b$, entonces:

- *Si $m = 0$, entonces $f(x) = b$ y f es la función constante y su gráfico es una recta horizontal.*
- *Si la pendiente es positiva, f es creciente. Es decir que al aumentar la variable independiente la función aumenta.*

En forma simbólica,

$$Si\; m > 0 \wedge \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: x_1 < x_2$$

$$m \cdot x_1 < m \cdot x_2$$
$$m \cdot x_1 + b < m \cdot x_2 + b$$
$$f(x_1) < f(x_2)$$

- *Si la pendiente es negativa, f es decreciente. Es decir que al aumentar la variable independiente la función disminuye.*

> Expresa en forma simbólica porque cuando la pendiente es negativa, la función lineal es decreciente.

Como podemos observar en la Figura 4, a medida que la pendiente m aumenta en valor absoluto, las rectas se van "pegando" al eje de ordenadas, son más verticales y hay un mayor crecimiento. En cambio, si el valor de m disminuye en valor absoluto, se van "pegando" al eje de abscisas, son más horizontales y hay un menor crecimiento.

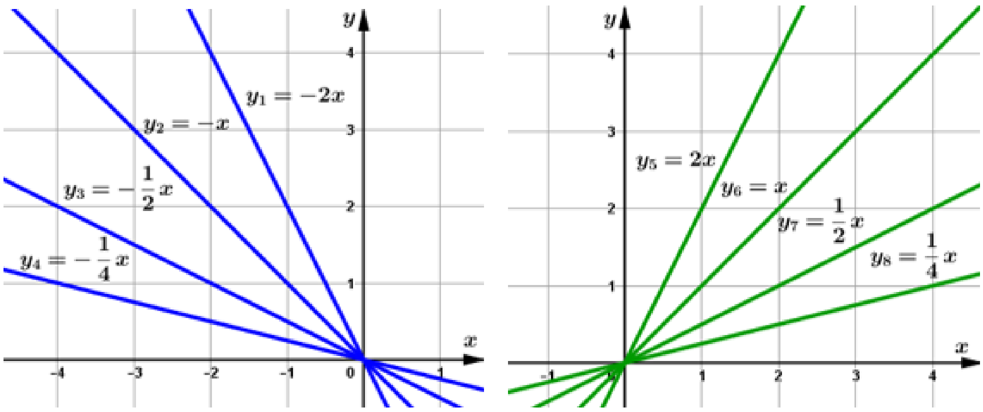


Figura 4

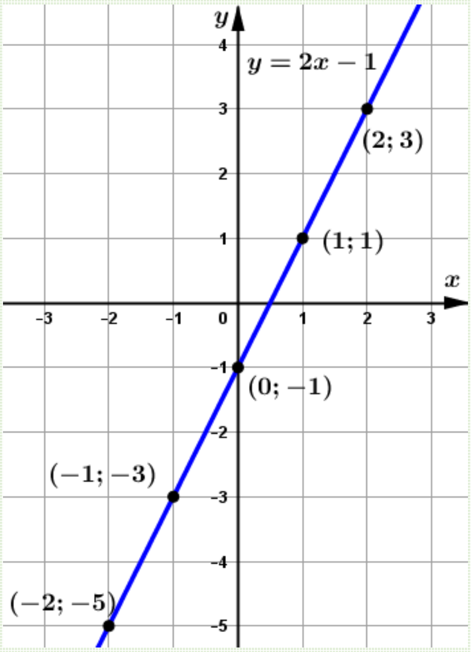
Ejemplo 12: *Representar la función lineal* $f(x) = 2x - 1$

En este primer momento, para graficar función lineal recurriremos a una tabla de valores.

x	$f(x) = 2x - 1$	**Punto del gráfico**
-2	$f(-2) = 2(-2) - 1 = -5$	$(-2; -5)$
-1	$f(-1) = 2(-1) - 1 = -3$	$(-1; -3)$
0	$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$	$(0; -1)$

1	$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$	$(1; 1)$
2	$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$	$(2; 3)$

El gráfico de la función lineal $f(x) = 2x - 1$ es la recta $y = 2x - 1$.



3.4.1. Recta que pasa por dos puntos

A continuación, estudiaremos como podemos determinar una función lineal si tenemos como datos las coordenadas de dos puntos por donde pasa.
En primer lugar, como sabemos que por dos puntos cualesquiera pasa una única recta, para hallar la pendiente m dados dos puntos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$, de acuerdo con la definición de *pendiente*, tenemos

$$m = \frac{\textit{variación de la variable dependiente}}{\textit{variación de la variable independiente}} = \frac{\textit{desplazamiento vertical}}{\textit{desplazamiento horizontal}}$$

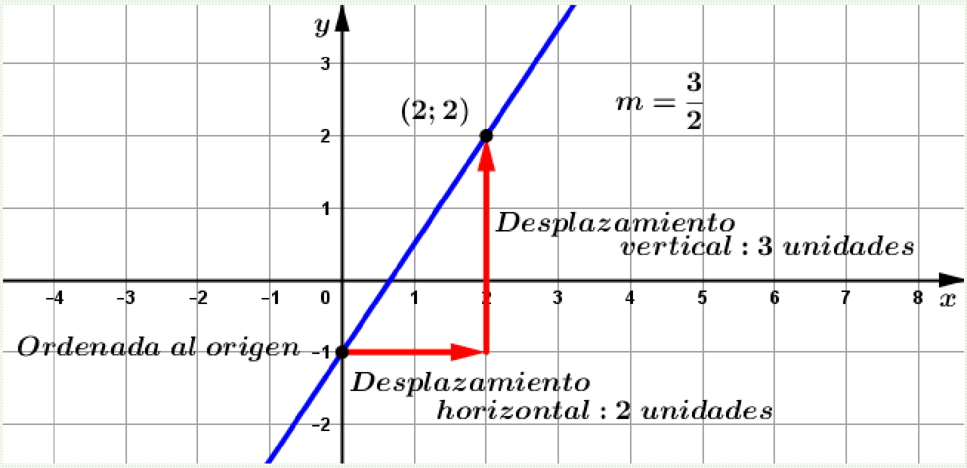
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para poder graficar una recta se puede recurrir a la información que brinda la pendiente como analizaremos a continuación.

Ejemplo 13: *Representar sin utilizar tablas de valores la función lineal*

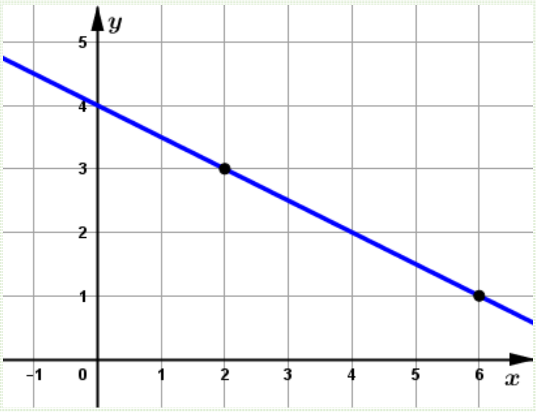
$$f(x) = \frac{3}{2}x - 1$$

En este caso, se debe detectar primero un punto de la recta. Como es fácil de identificarla, ubicamos la ordenada al origen ($b = -1$) y seguimos con la información dada por la pendiente ($m = \frac{3}{2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ variación en y sobre la variación en x). Es decir, desde la ordenada nos desplazamos dos unidades a la derecha (ya que la variación en x indica un desplazamiento horizontal) y tres unidades hacia arriba (debido a que la variación en y indica un desplazamiento vertical). De esta manera, queda determinado el punto $(2; 2)$ y por ende la recta que pasa por $(0; -1)$ y $(2; 2)$.



A continuación, presentaremos algunos ejemplos sobre cómo encontrar la ecuación de la recta.

Ejemplo 14: *Hallar la ecuación de la recta cuyo gráfico es el siguiente:*



Podemos tomar dos puntos que pertenezcan a la recta, por ejemplo, los puntos $(2; 3)$ y $(6; 1)$.
Como sabemos la ecuación de la recta es $y = mx + b$. Por lo visto anteriormente, dados dos puntos es posible hallar la pendiente:

$$m = \frac{3-1}{2-6} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

La recta es de la forma:

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

Para determinar el valor de b consideramos cualquiera de los puntos de paso y reemplazamos sus coordenadas. Obtendremos una ecuación para despejar la ordenada al origen.
Por ejemplo, tomando el punto $(6; 1)$:

$$1 = -\frac{1}{2} \cdot 6 + b$$
$$1 = -3 + b \implies \boldsymbol{b = 4}$$

Entonces la recta pedida es,

$$\boxed{\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + 4}}$$

3.4.2. Rectas paralelas y perpendiculares

Sean las rectas

$$r_1: y = m_1x + b_1$$
$$r_2: y = m_2x + b_2$$

Podemos clasificarlas de la siguiente manera:

- *Se dice que r_1 y r_2 son **paralelas** si sus pendientes son iguales.*
- *Se dice que r_1 y r_2 son **coincidentes** si sus pendientes son iguales y sus ordenadas al origen son iguales.*
- *Se dice que r_1 y r_2 son **perpendiculares** si sus pendientes son inversas y opuestas. Es decir, si el producto de sus pendientes es igual a -1.*
- *Se dice que r_1 y r_2 son **secantes** si no se cumplen ninguna de las condiciones anteriores.*

En la Figura 5a se encuentran representadas las funciones $y = -\frac{1}{2}x + 4$ e $y = -\frac{1}{2}x$, al tener pendientes iguales y ordenadas distintas, sus gráficas son rectas paralelas. En el caso de la Figura 5b las funciones $y = -\frac{1}{2}x + 4$ e $y = 2x$, al tener pendientes opuestas (signos distintos) e inversas (intercambio de numerador y denominador), sus gráficas son rectas perpendiculares.

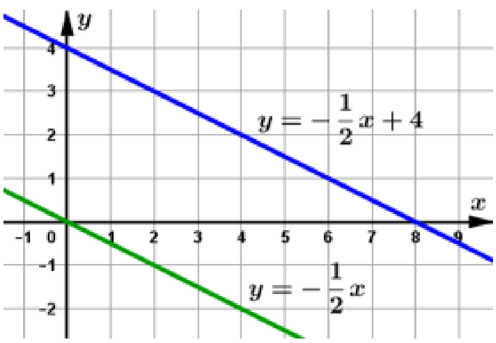


Figura 5a

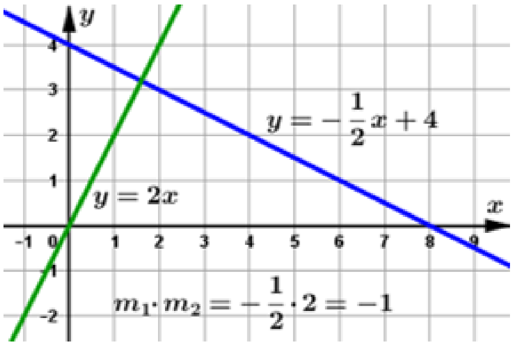


Figura 5b

3.5. Función cuadrática

Toda ***función cuadrática*** es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ fijos y $a \neq 0$. Es decir, es un polinomio de grado 2 $\big(P_2(x)\big)$.

¿Por qué se realiza la aclaración de que el parámetro a tiene que ser distinto de cero? ¿Qué función sería si a es cero?

A continuación, señalaremos sus características fundamentales:

- *El gráfico de una función cuadrática es una parábola con eje de simetría vertical, cuya ecuación es:*

$$x = x_v$$

- *Si el coeficiente principal a de $P_2(x)$ es positivo las ramas de la parábola apuntan hacia arriba, mientras que si a es negativo las ramas son hacia abajo.*

$$a > 0 \Rightarrow \cup \qquad\qquad a < 0 \Rightarrow \cap$$

- *El punto máximo o mínimo de la función cuadrática se denomina vértice, además se encuentra sobre el eje de simetría, y se identifica como:*

$$V = (x_v; y_v)$$

- *La imagen depende de a es:*

$$a > 0 \implies Im(f) = [y_v; +\infty), \qquad a < 0 \implies Imf = (-\infty; y_v]$$

En la Figura 6 podemos observar la gráfica de algunas funciones cuadráticas.

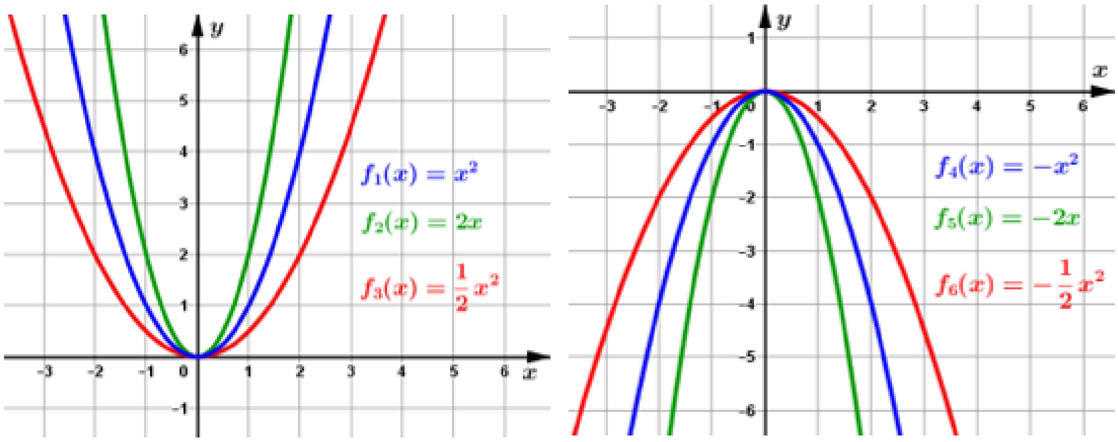


Figura 6

Pasemos a estudiar, ahora, la función cuadrática $f(x) = x^2$, es decir, cuando $a = 1, b = 0, c = 0$.
Para hacer un gráfico aproximado, confeccionamos una tabla de valores

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = x^2}$	**Punto del gráfico**
$\mathbf{-2}$	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	$(-2; 4)$
$\mathbf{-1}$	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	$(-1; 1)$
$\mathbf{0}$	$f(0) = 0^2 = 0$	$(0; 0)$
$\mathbf{1}$	$f(1) = 1^2 = 1$	$(1; 1)$
$\mathbf{2}$	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2; 4)$

Si volcamos los puntos obtenidos en un sistema de coordenadas, y unimos los puntos, queda determinada una parábola (Ver Figura 7).

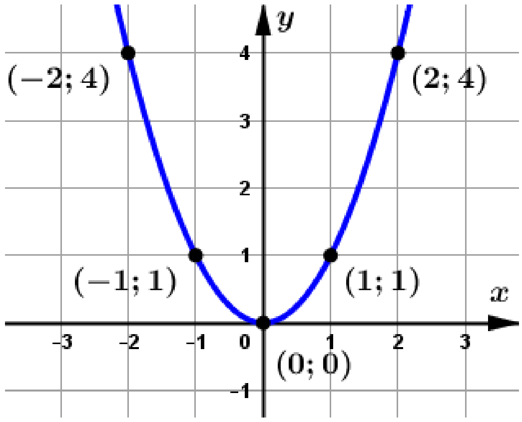


Figura 7

Observemos algunas cuestiones del gráfico de $f(x) = x^2$:

- *No hay ninguna restricción para su dominio. Es decir,*

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

- *La imagen de la función solo puede tomar valores mayores o iguales a cero. En forma simbólica, decimos*

$$Im(f) = [0; +\infty)$$

- $C_0(f) = \{0\}$, $C_+(f) = (0; +\infty)$ *y* $C_-(f) = (-\infty; 0)$.

- *La función alcanza un mínimo en* $x = 0$ *y vale* $f(0) = 0$.

- *Posee un eje de simetría en este caso la recta* $x = 0$ *y el punto donde se corta este eje con el gráfico (vértice de la parábola), en este ejemplo el vértice es* $V = (0; 0)$.

3.5.1. Formas de expresar una función cuadrática

Hay tres formas de expresar una función cuadrática:

- *Polinómica:*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- *Canónica:*

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

siendo el vértice: $V = (x_v;\ y_v)$

- *Factorizada:*

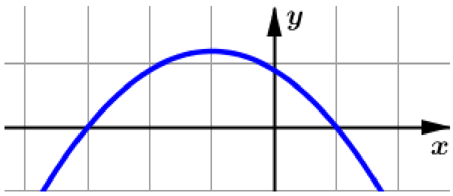
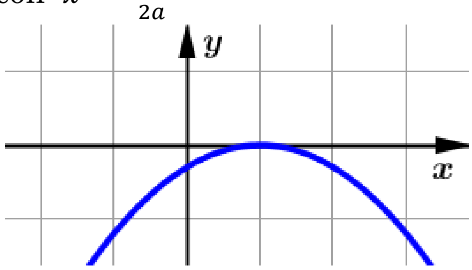
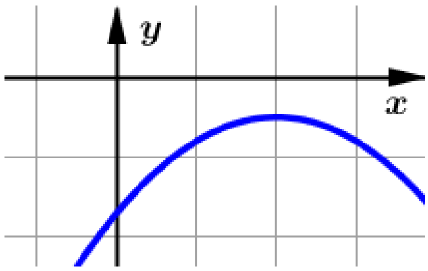
$$f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

siendo x_1 *y* x_2 *las raíces de la función.*

Por la simetría de la parábola el *vértice* será:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a} \qquad y_V = f(x_V)$$

En el capítulo de ecuaciones vimos la relación entre el signo del discriminante y la cantidad de soluciones de la ecuación $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ que es la que nos permite encontrar las raíces de la función cuadrática.

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$	**Dos raíces reales diferentes** La gráfica corta dos veces al eje x 
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$	**Raíces reales iguales** La gráfica corta al eje de las x en un único punto con $x = \frac{-b}{2a}$ 
$\Delta = b^2 - 4ac < 0$	**No hay raíces reales.** No hay intersección con el eje x. 

Ejemplo 15: *Hallar la fórmula de la función cuadrática que tiene vértice* $V = (-2; 6)$ *y pasa por el punto* $(1; 1)$. *Hallar las raíces y graficar.*

Dado el vértice y un punto podemos reemplazar en la forma canónica los datos dados

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v = a(x - (-2)^2 + 6$$
$$f(x) = a(x + 2)^2 + 6$$

Para obtener el valor del parámetro a usaremos el dato del punto por donde pasa la parábola:

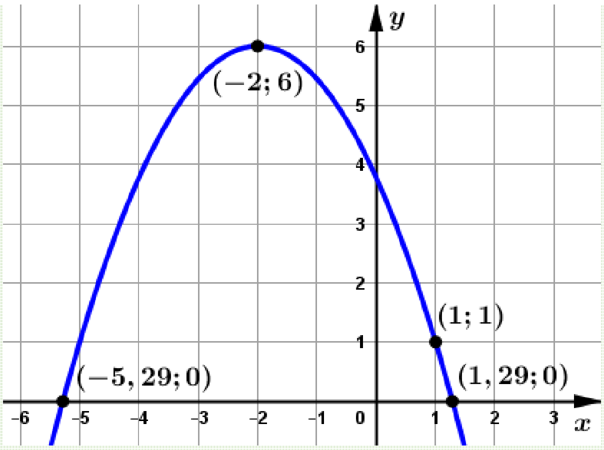
$$f(1) = 1 = a(1 + 2)^2 + 6$$
$$1 = a(3)^2 + 6$$
$$1 - 6 = a\,9$$
$$\frac{-5}{9} = a$$

Reemplazando nos queda que la función es

$$f(x) = -\frac{5}{9}(x + 2)^2 + 6$$

Para hallar las raíces igualamos a cero la función y resolvemos

$$0 = -\frac{5}{9}(x + 2)^2 + 6$$
$$\frac{5}{9}(x + 2)^2 = 6$$
$$(x + 2)^2 = \frac{54}{5}$$
$$|x + 2| = \sqrt{\frac{54}{5}}$$
$$x + 2 = -\sqrt{\frac{54}{5}} \quad \vee \quad x + 2 = +\sqrt{\frac{54}{5}}$$
$$\boxed{\boldsymbol{x_1 = -2 - \sqrt{\frac{54}{5}}}} \cong -5{,}29 \quad \vee \quad \boxed{\boldsymbol{x_2 = -2 + \sqrt{\frac{54}{5}}}} \cong 1{,}29$$



Ejemplo 16:

(a) Hallar la fórmula y el vértice de una función cuadrática que tenga raíces en -4 y 3 y su ordenada al origen sea 6.

Conviene, por los datos del problema, hallar la fórmula de la función utilizando la forma factorizada.

$$f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = a(x - (-4)) \cdot (x - 3)$$
$$f(x) = a(x + 4) \cdot (x - 3)$$

Sabemos que la ordenada al origen es 6, es decir que $f(0) = 6$

$$f(0) = 6 = a(0 + 4) \cdot (0 - 3)$$
$$6 = a(+4) \cdot (-3)$$
$$\frac{6}{-12} = a$$
$$a = -\frac{1}{2}$$

Reemplazamos

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{2}(x + 4) \cdot (x - 3)}}$$

Con el dato de las raíces podemos hallar el vértice como punto medio entre ellas

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4 + 3}{2} = -\frac{1}{2}$$

para hallar la coordenada y_V deberemos reemplazar en la fórmula

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + 4\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - 3\right) = \frac{49}{8}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V = \left(\frac{-1}{2}\ ;\ \frac{49}{8}\right)}}$$

(b) *Hallar la fórmula de la función cuadrática que tiene vértice* $(-1;-1)$ *y una de sus raíces es* $x = 1$

Si el vértice es $(-1;-1)$ y una raíz $x = 1$ por simetría la otra raíz está a dos unidades de la coordenada x_V a la izquierda, es decir $x = -3$.

Ya tenemos información suficiente para armar la fórmula de la función, es indistinto si trabajamos con la forma factorizada o con la forma canónica.

$$f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = a(x - 1) \cdot (x + 3)$$

Usamos el vértice para hallar el valor del coeficiente principal.

$$f(-1) = -1 = a(-1 - 1) \cdot (-1 + 3)$$
$$-1 = a(-2) \cdot 2 \rightarrow a = \frac{1}{4}$$
$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{4}(x - 1) \cdot (x + 3)}}$$

Ejemplo 17: *Una empresa que fabrica envases de vidrio calcula la ganancia mensual en función de la cantidad de envases fabricados por medio de la fórmula*

$$G(x) = -x^2 + 20x - 36$$

donde x está expresada en cientos de envases y la ganancia está expresada en miles de pesos.

(a) *¿Cuál es la cantidad de envases que debe fabricar para obtener ganancia máxima?*

La ganancia máxima se obtendrá en el vértice

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-1)} = 10$$
$$y_V = \mathrm{G}(x_V) = -10^2 + 20.10 - 36$$
$$y_V = -100 + 200 - 36$$
$$y_V = 64$$
$$V = (10; 64)$$

Es decir, deberá fabricar 1000 envases para tener una ganancia de \$64000 *(b) ¿Cuántos envases tiene que vender para obtener una ganancia de $18.435,50?*

Para averiguar cuántos envases debe vender para ganar $18.435,50, igualamos la ganancia a la expresión dada:

$$18{,}43550 = -x^2 + 20x - 36$$
$$x_1 \cong 3{,}25 \quad ; \quad x_2 \cong 16{,}75$$

Dado que son envases y estaban expresados en cientos, deberán fabricar.

$$x_1 \cong 325 \quad ; \quad x_2 \cong 168$$

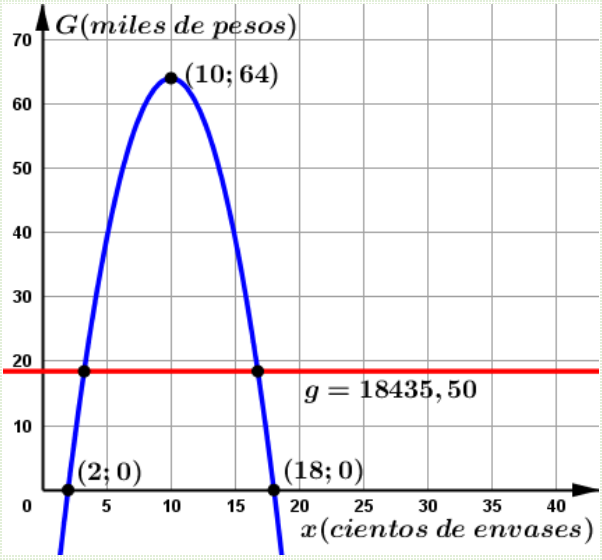
(c) ¿Cuántos envases tiene que fabricar para obtener ganancia?

Para obtener ganancia deberá fabricar envases que hagan positiva a la ganancia ya que, si fabrica menos o más la función tomará valores negativos, representando pérdida o ganancia nula.

Para poder responder hallamos las raíces

$$0 = -x^2 + 20x - 36$$
$$\boxed{\boldsymbol{x_1 = 2}} \quad ; \quad \boxed{\boldsymbol{x_2 = 18}}$$

Grafiquemos la función para visualizar la función ganancia y las respuestas obtenidas



Podemos ver que para obtener ganancia deberá fabricar entre **200** y **1800** envases.

3.6. Función racional

Una función racional es aquella que se puede expresar como una división de polinomios.
Analíticamente,

$$f: A \to \mathbb{R} / \; f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad con\; q(x) \neq 0$$

Es importante notar que el polinomio divisor no puede anularse.

Ejemplo 18: *Determinar el dominio y conjunto de ceros de la función,*

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 7x + 10}$$

Para que el denominador no sea cero, debemos eliminar las raíces del polinomio divisor.
Para hallar los ceros o raíces, tenemos que igualar la expresión del denominador a cero y resolver.

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \to x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = 5$$

Entonces, el dominio tendrá que excluir dichos valores. Es decir,

$$\boxed{\boldsymbol{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{\mathbf{2}; \mathbf{5}\}}$$

En cambio, para encontrar el conjunto de ceros, a la que tenemos que igualar a cero es a la función,

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 7x + 10} = 0$$

Por ser una división el numerador debe ser cero:

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \cdot$$

Las soluciones para esta ecuación cúbica son,

$$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

No hay que olvidarnos que debemos, además, verificar que los valores hallados se encuentren en el dominio.
En nuestro ejemplo, como estos valores pertenecen al dominio, entonces podemos decir que el conjunto de ceros o raíces es:

$$\boxed{\boldsymbol{C^0} = \left\{\mathbf{1};\ \frac{\mathbf{-1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}};\ \frac{\mathbf{-1-\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\right\}}$$

Ejemplo 19: *Determinar el dominio, conjunto de ceros de la función e intersección con el eje y.*

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 + x^2 - 2x}$$

Para determinar el dominio debemos eliminar las raíces del polinomio divisor.

$$x^3 + x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^2 + x - 2) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad (x^2 + x - 2) = 0$$
$$x = 0;\ x = 1;\ x = -2$$

Entonces, el dominio tendrá que excluir dichos valores. Es decir,

$$\boxed{\boldsymbol{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{\mathbf{-2};\mathbf{0};\mathbf{1}\}}$$

En cambio, para encontrar el conjunto de ceros, tenemos que igualar a cero es a la función,

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 + x^2 - 2x} = 0$$

Por ser una división el numerador debe ser cero:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = -3; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 1$$

Recordar verificar que los valores hallados se encuentren en el dominio.
En nuestro ejemplo, $x_2 = -2;\ x_3 = 1$ no pertenecen al dominio, entonces podemos decir que el conjunto de ceros o raíces es:

$$\boxed{\boldsymbol{C^0} = \{\mathbf{-3}\}}$$

Para obtener la intersección con el eje y debemos calcular $f(0)$, pero el 0 no pertenece al dominio de la función, por lo tanto, no hay intersección con el eje y.

3.6.1. Función homográfica

Es un tipo de función racional,

$$f: A \to R / \, f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad con\ p(x) y\ q(x) lineales\ y\ q(x) \neq 0$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \quad Im(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

Ejemplo 20 *Hallar el dominio, intersección con el eje de ordenadas y ceros de la siguiente función*

$$f(x) = \frac{2x - 8}{3x + 9}$$

Para que el denominador no sea cero, debemos descartar el valor que lo anula $3x + 9 = 0$, es decir, $x \neq -3$

$$\boxed{\boldsymbol{Dom(f)} = \mathbb{R} - \{\mathbf{-3}\}}$$

Hallamos los ceros:

$$f(x) = 0 = \frac{2x - 8}{3x + 9}$$
$$0 = 2x - 8$$
$$\boxed{\boldsymbol{C^0} = \{\mathbf{4}\}}$$

Para la intersección con el eje de ordenadas, calculamos

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 8}{3 \cdot 0 + 9} = \boxed{-\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{9}}}$$

3.7. Función irracional

Una función irracional es aquella en que la variable independiente está afectada por una raíz.
Debemos tener mucho cuidado en definir correctamente el dominio de estas funciones. Si la raíz es de índice par, el radicando debe ser mayor o igual que cero y por lo tanto afectará a la definición del dominio.

Por ejemplo, si: $f(x) = \sqrt{4-x}$ para hallar el dominio necesitamos que

$$4 - x \geq 0$$

Resolviendo la inecuación, obtenemos

$$4 \geq x$$

Por lo tanto, el dominio queda definido como

$$Dom(f) = (-\infty; 4]$$

Pero, si $g(x) = \sqrt[3]{2x+5}$ el dominio no tiene restricciones, por lo tanto

$$Dom(g) = \mathbb{R}$$

Ejemplo21: *Hallar dominio, ordenada al origen y raíces de la siguiente función*

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$$

Para hallar el dominio necesitamos que

$$-x^2 + x + 2 \geq 0$$

Factorizando la cuadrática

$$-x^2 + x + 2 = (-1) \cdot (x-2)(x+1)$$

Debemos buscar el conjunto de positividad de la cuadrática. Como el coeficiente principal es negativo tiene las ramas hacia abajo, por lo que será el intervalo entre las raíces.
Por lo tanto, el dominio queda definido como:

$$\boxed{\boldsymbol{Dom(f) = (-1; 2)}}$$

La ordenada al origen es

$$f(0) = \sqrt{-0^2 + 0 + 2} = \boxed{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$$

Las raíces coinciden con las raíces de la cuadrática o sea que son $x = 2$ y $x = -1$

$$\boxed{\boldsymbol{C^0 = \{-1; 2\}}}$$

3.8. Función exponencial

Se llama función exponencial porque la variable independiente está en el exponente. En forma simbólica,

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / f(x) = ka^x$$

con $k \in \mathbb{R}, k \neq 0, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$

El dominio de esta clase de funciones es el conjunto de todos los números reales, ya que no hay ninguna restricción para elevar un número positivo. Es decir,

$$Dom\,(f) = \mathbb{R}$$

La función exponencial caracteriza modelos en los que a iguales incrementos de la variable independiente se dan iguales porcentajes de aumento, o disminución, en la variable dependiente. Esta característica permite estudiar varios tipos de ejemplos reales en los que esto sucede: poblaciones de bacterias, plazos fijos, masa de sustancias radiactivas, etc.
La forma de su gráfica depende de los posibles valores que puede tomar el parámetro a. En la Figura 8 se muestra las alternativas de curvas que puede presentar las funciones exponenciales para $k > 0$.

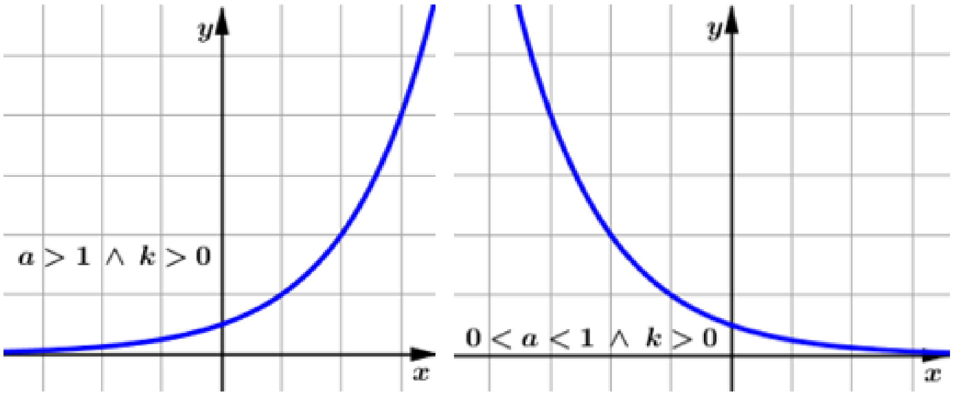


Figura 8

Si $k < 0$, los gráficos se reflejan respecto del eje x, como se muestra en la Figura 9.

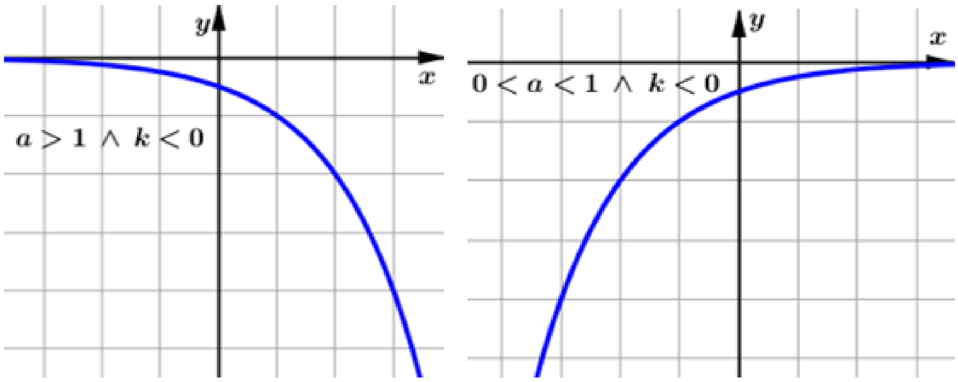


Figura 9

La imagen de la función exponencial depende de k.

- *Si* $k > 0$ *la imagen es:* $Im(f) = (0;\ +\infty)$
- *Si* $k < 0$ *la imagen es:* $Im(f) = (-\infty;\ 0)$

Se puede observar que en cualquier caso la función exponencial nunca vale cero y que a^x es siempre positivo.

Ejemplo 22: *La masa de una población de bacterias aumenta un* $25\ \%$ *por hora. En un determinado momento se colocan* $120\ g$ *de bacterias en una cubeta. ¿Cuántos gramos de bacterias habrá al cabo de* 1 *hora? ¿Y de* 2 *horas? ¿Y de* 3 *horas? ¿Y de t horas? Represente gráficamente la masa total de bacterias en función del tiempo.*

Para responder a la primera pregunta, como sabemos que se comienza con $120\ g$, una hora después habrá un $25\ \%$ *más*, es decir

$$120 \cdot 0{,}25 + 120 \ = 120 \cdot 1{,}25 = 150 \text{ g}$$

Confeccionamos una tabla de valores para analizar el comportamiento de la función buscada.

Tiempo desde que comenzó la experiencia (en horas)	**Masa de bacterias (en gramos)**
0	120
1	$120 + 120 \cdot 0{,}25 \ = \ 120(1 + 0{,}25)$ $= 150$
2	$120 \cdot 1{,}25 + 120 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}25 = 120 \cdot 1{,}25(1 + 0{,}25)$ $= 120 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}25$ $= 187{,}50$
3	$120 \cdot 1{,}25^2 \cdot 1{,}25 = 120 \cdot 1{,}25^3$ $= 234{,}38$

Notemos que el exponente al que está elevado 1,25 coincide con la cantidad de horas transcurridas. Así, si generalizamos para cualquier cantidad de horas t, los gramos de bacterias en función del tiempo serán:

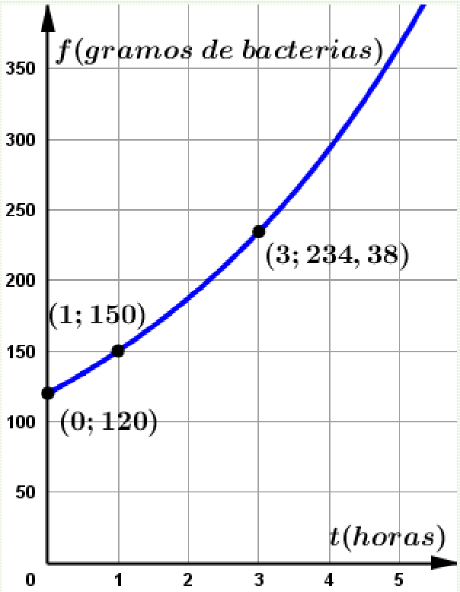
$$f(t) = 120 \cdot 1{,}25^t$$

Observemos que la base de la exponencial es 1,25, donde la parte decimal es el porcentaje de aumento por hora.
Podemos preguntarnos: ¿la función que encontramos verifica que, si pasa 1 hora desde cualquier momento, la masa aumenta un 25%? Pasemos a realizar los cálculos necesarios para responder esta cuestión.
Si $f(x) = \ 120 \cdot 1{,}25^x$, entonces $f(b) = 120 \cdot 1{,}25^b$.
Por lo tanto,

$$f(b + 1) = 120 \cdot \ 1{,}25^{b+1}$$
$$f(b + 1) = 120 \cdot \ 1{,}25^b \cdot 1{,}25$$
$$f(b + 1) = f(b) \cdot 1{,}25$$

Es decir que $f(b + 1)$ es un 125% $de\ f(b)$ para cualquier b. Lo que indica que, al avanzar una hora, desde cualquier momento, aumenta un 25%. Podemos concluir, entonces, que la fórmula encontrada cumple con el enunciado.

Su gráfica, la podemos observar a continuación:



Ejemplo 23: *En un laboratorio se está analizando una colonia de bacterias. Se cuenta con una masa inicial de 60 gr y se observa que cada 5 minutos la masa aumenta un* 1,2 %. *¿Cuál será la masa de bacterias después de una hora? ¿Y después de* 3 *h? Hallar la fórmula que nos dé la masa de bacterias después de t horas.*

El crecimiento de la colonia de bacterias es de forma exponencial, por lo tanto, su fórmula debe tener la forma,

$$f(t) = k \cdot a^{bt}$$

Vamos a considerar en el exponente bt porque el dato del porcentaje de aumento es en minutos y queremos la fórmula en horas.
Como la masa aumenta un 1,2 % por período, después de un período tenemos el 101,2 % del valor anterior. Esto equivale a 1,012, que es el coeficiente por el que tenemos que multiplicar la masa por cada período. Entonces,

$$a = 1{,}012$$

Sabemos que para $t = 0\,h$, la masa era de 60 g, por lo tanto,

$$f(0) = k \cdot 1{,}012^{b \cdot 0}$$
$$60 = k \cdot 1{,}012^{0} \rightarrow \boxed{60 = k}$$

Como 5 minutos es la doceava parte de una hora, sabemos que

$$f\left(\frac{1}{12}\ h\right) = 60 \cdot 1{,}012^{b \cdot \frac{1}{12}} \quad (1)$$

Por otro lado, sabemos que será,

$$60 + 1{,}2\% \cdot 60 \quad (2)$$

Igualando (1) y (2) despejamos b,

$$60 + 1{,}2\% \cdot 60 = 60 \cdot 1{,}012^{b \cdot \frac{1}{12}}$$
$$60{,}72 = 60 \cdot 1{,}012^{\mathrm{b} \cdot \frac{1}{12}}$$
$$\frac{60{,}72}{60} = 1{,}012^{\mathrm{b} \cdot \frac{1}{12}}$$
$$1{,}012 = 1{,}012^{\mathrm{b} \cdot \frac{1}{12}}$$

Por lo tanto, como las bases son iguales, el exponente debe valer 1.

$$1 = b \cdot \frac{1}{12} \implies \mathbf{12 = b}$$

Finalmente, la fórmula que nos da la masa de bacterias en función del tiempo es:

$$\boxed{\boldsymbol{f(t) = 60\ g \cdot 1{,}012^{\frac{12}{h} \cdot t}}}$$

Para calcular la masa después de una hora hacemos:

$$f(1\ h) = 60\ g \cdot 1{,}012^{\frac{12}{h} \cdot 1h} = \boxed{\mathbf{69{,}23\ g}}$$

Y para hallar la masa después de tres horas,

$$f(3\ h) = 60\ g \cdot 1{,}012^{\frac{12}{h} \cdot 3h} = \boxed{\mathbf{92{,}18\ g}}$$

3.9. Función logarítmica

En esta función la variable independiente está en el argumento de un logaritmo. En forma simbólica,

$$f: (0;\ +\infty) \to \mathbb{R}/f(x) = \log_a x$$

con $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$

Su dominio son todos los números reales positivos. Es decir,

$$Dom(f) = (0;\ +\infty)$$

La función logarítmica siempre tiene asíntota vertical. La ecuación de la asíntota vertical es $x = 0$.
La curvatura del gráfico y crecimiento depende del parámetro a, base del logaritmo, como podemos observar en la Figura 10.

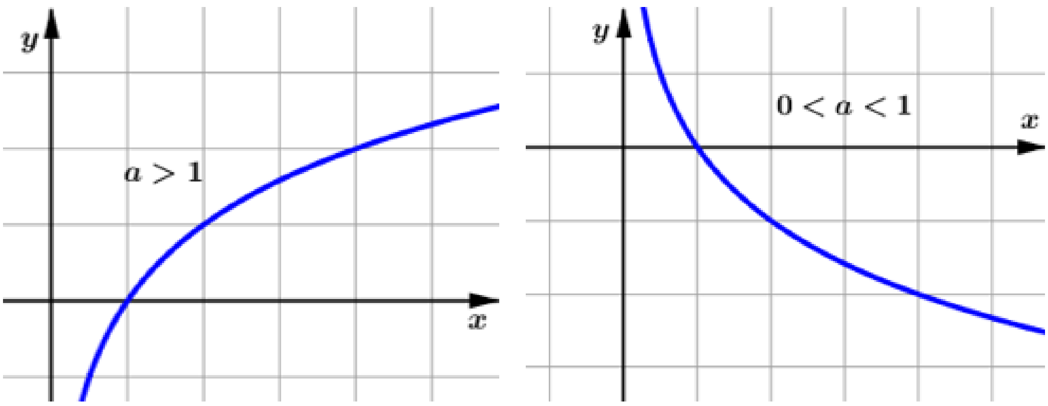


Figura 10

La imagen de la función logarítmica es siempre el conjunto formado por todos los números reales.

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Las funciones exponenciales y logarítmicas como funciones inversas

Si redefinimos la función exponencial de la siguiente forma:

$$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)/f(x) = a^x$$

Con $a \in \mathbb{R}, a > 0$ y $a \neq 0$

Es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva y admite función inversa. De $f(x) = y = a^x$, despejamos x aplicando las propiedades ya vistas de logaritmos. Resulta,

$$\log_a y = \log_a(a^x)$$
$$\log_a y = x \cdot \log_a a$$
$$\boxed{\log_a y = x}$$

Es decir,

$$f^{-1}(\mathrm{y}) = \log_a y$$

que es la función inversa de $y = a^x$

En consecuencia, si siempre llamamos x a la variable independiente,

$$f: \mathbb{R} \to (0; +\infty)/f(x) = a^x \implies f^{-1}: (0; +\infty) \to \mathbb{R}/ f^{-1}(x) = \log_a(x)$$

Veamos algunos ejemplos:

$$f: \mathbb{R} \to (0; +\infty)/f(x) = 2^x \implies f^{-1}: (0; +\infty) \to \mathbb{R}/ f^{-1}(x) = \log_2(x)$$

$$g: \mathbb{R} \to (0; +\infty)/g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \implies g^{-1}: (0; +\infty) \to \mathbb{R}/ g^{-1}(x) = \log_{1/3}(x)$$

$$h: (0; +\infty) \to \mathbb{R}/h(x) = \log_4(x) \implies h^{-1}: \mathbb{R} \to (0; +\infty)/ h^{-1}(x) = 4^x$$

$$w: (0; +\infty) \to \mathbb{R}/w(x) = \log_{0,2}(x) \implies w^{-1}: \mathbb{R} \to (0; +\infty)/ w^{-1}(x) = (0,2)^x$$

Ejemplo 24: *En un laboratorio se está analizando una colonia de bacterias. Se cuenta con una masa inicial de 60 gr, se observa que cada 5 minutos la masa aumenta un* 1,2%. *¿Cuándo se duplica la masa de bacterias?*

Como el enunciado coincide con el **Ejemplo 23,** ya sabemos cuál es la función:

$$f(t) = 60\ g \cdot (1{,}012)^{\frac{12}{h} \cdot t}$$

Si queremos averiguar cuánto tarda la masa en duplicarse tendríamos que resolver la siguiente ecuación:

$$120\ g = 60\ g \cdot 1{,}012^{\frac{12}{h} \cdot t}$$

$$\frac{120\ g}{60\ g} = 1{,}012^{\frac{12}{h} \cdot t}$$
$$2 = 1{,}012^{\frac{12}{h} \cdot t}$$

Para poder resolver esta ecuación tenemos que aplicar logaritmo decimal, por ejemplo, en ambos miembros,

$$\log 2 = \log\left(1{,}012^{\frac{12}{\mathrm{h}} \cdot \mathrm{t}}\right)$$
$$\log 2 = \frac{12}{\mathrm{h}} \mathrm{t} \cdot \log(1{,}012)$$
$$\frac{\log 2}{\log 1{,}012} \cdot \frac{\mathrm{h}}{12} = \mathrm{t}$$
$$\boxed{\mathbf{t \cong 4{,}84}\ \boldsymbol{h} \cong \mathbf{4}\ \boldsymbol{h}\ \mathbf{50}\ \boldsymbol{min}\ \mathbf{32{,}44}\ \boldsymbol{seg}}$$

Por lo tanto, la masa de bacterias se duplica pasadas las $4\ h\ 50\ min\ 32{,}44\ seg$ aproximadamente.

3.10. Funciones trigonométricas

3.10.1. Función seno

Se llama función seno a todas aquellas que tienen la forma,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = a \operatorname{sen}(bx)$$

con $\forall a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$

- *El dominio de la función seno son todos los números reales.*

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

- *La imagen depende del valor de a. Queda definida como,*

$$Im(f) = [-|a|; |a|]$$

- *Para hallar las raíces el argumento debe ser igual a un múltiplo entero de π.*

$$bx = k\pi \quad con\ k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{k\pi}{b}$$

- *Los máximos y mínimos de esta función se encuentran en el punto medio entre dos raíces consecutivas.*

- *La función seno es periódica, de período* $p = \frac{2\pi}{b}$

Para determinar su gráfica, primero hallamos las abscisas de los máximos, mínimos, raíces y luego sus imágenes. Por último, utilizando estos puntos, graficamos.
Las curvas que representan los gráficos de las funciones seno y coseno se llaman sinusoides.
El gráfico de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ la podemos observar en la Figura 11.

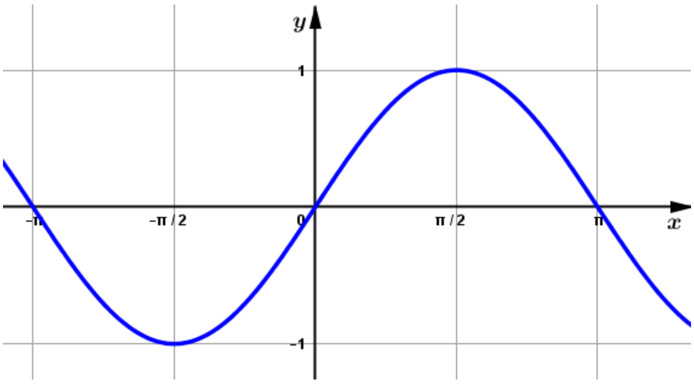


Figura 11

Ejemplo 25: *Hallar el conjunto imagen y las raíces de*

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2\, sen(4x)$$

Realizar su representación gráfica.

Siendo $a = 2$, podemos observar que su imagen queda definida como:

$$Im(f) = [-2;\ 2]$$

Para hallar las raíces, hacemos,

$$4x = k\pi \implies \boxed{x = \frac{k\pi}{4}}$$

A medida que le damos valores a $k \in \mathbb{Z}$, encontramos las raíces:
$\boldsymbol{k_0 = 0} \implies x_0 = 0$
$\boldsymbol{k_1 = 1} \implies x_1 = \frac{1\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$\boldsymbol{k_2 = 2} \implies x_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

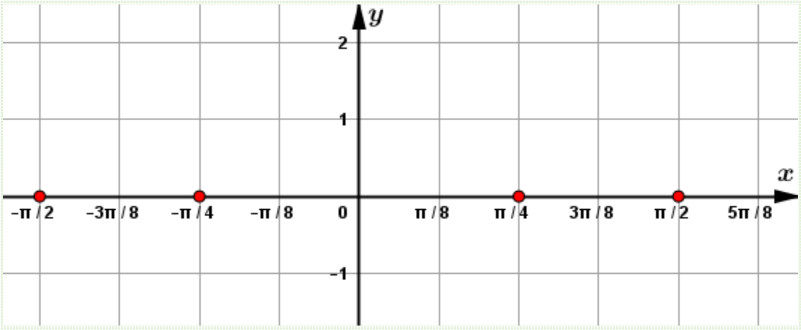
$\boldsymbol{k_{-1} = -1} \implies x_{-1} = \frac{(-1)\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

$\boldsymbol{k_{-2} = -2} \implies x_{-2} = \frac{(-2)\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$

En definitiva, los ceros de la función es el conjunto infinito,

$$C^0 = \left\{\cdots - \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; 0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \cdots\right\}$$

Ahora podemos hallar los máximos y mínimos de la función, teniendo en cuenta los puntos medios entre las raíces consecutivas,



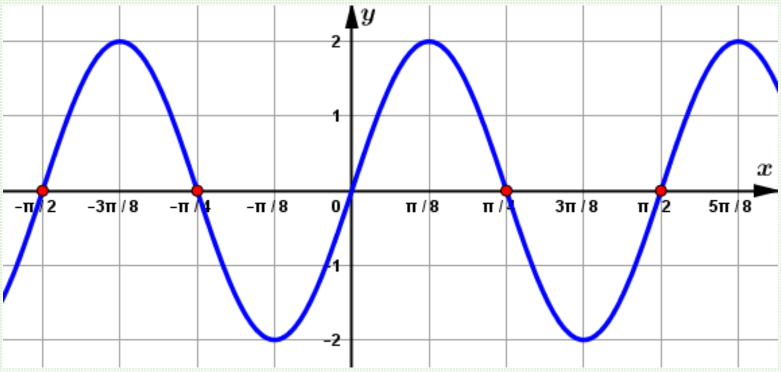
$$\cdots; -\frac{3\pi}{8}; -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \ldots$$

Determinamos sus imágenes,

$$f\left(-\frac{3\pi}{8}\right) = 2 \qquad f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \qquad f\left(\frac{5}{8}\pi\right) = 2$$

$$f\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -2 \qquad f\left(\frac{3}{8}\pi\right) = -2 \qquad f\left(\frac{7}{8}\pi\right) = -2$$

Con todos estos datos, ya estamos en condiciones de realizar su gráfica,



3.10.2. Función coseno

Se llama función coseno a todas aquellas que tienen la forma,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = a\cos(bx)$$

con $\forall a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0$

Al igual que la función seno, el dominio de la función coseno son todos los números reales.

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

De la misma manera, la imagen depende del valor de a.

$$Im(f) = [-|a|;\ |a|]$$

Para hallar las raíces, el argumento debe ser igual a un múltiplo impar de $\pi/2$.

$$bx = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad con\ k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{(2k+1)\pi}{b2}$$

El gráfico de la función $f(x) = cos(x)$ lo presentamos en la Figura 12.

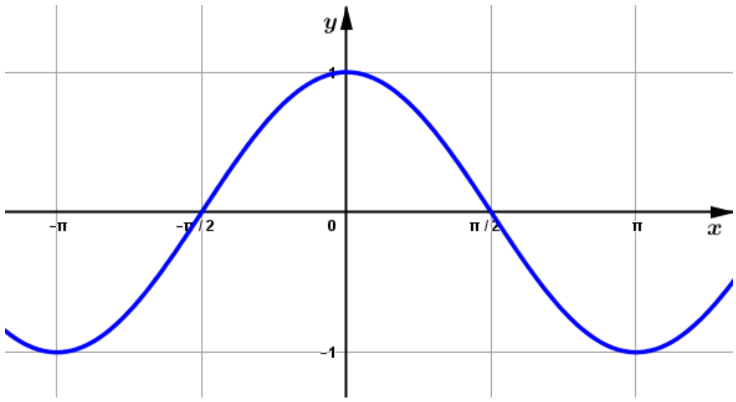


Figura 12

Ejemplo 26 *Graficar la función* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 2\cos(x) - 1$ *en el intervalo* $[0,2\pi)$. *Hallar analíticamente sus raíces, máximos y mínimos, en dicho intervalo.*

Como

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$
$$-2 \leq 2\cos(x) \leq 2$$
$$-2 - 1 \leq 2\cos(x) - 1 \leq 2 - 1$$
$$-3 \leq 2\cos(x) - 1 \leq 1$$
$$-3 \leq f(x) \leq 1$$
$$Im(f) = [-3;\ 1]$$

Para hallar las raíces, hacemos,

$$2\cos(x) - 1 = 0$$
$$2\cos(x) = 1$$
$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{3} \qquad \vee \quad x = \frac{5}{3}\pi$$

En definitiva, los ceros de la función en $[0; 2\pi)$, resultan

$$\boxed{\mathbf{C^0} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}}$$

Ahora podemos hallar los máximos y mínimos de la función, teniendo en cuenta que la función toma valores entre -3 y 1

$$-3 \leq f(x) \leq 1$$

Es decir que el valor máximo es 1 y el valor mínimo de la función es (-3)

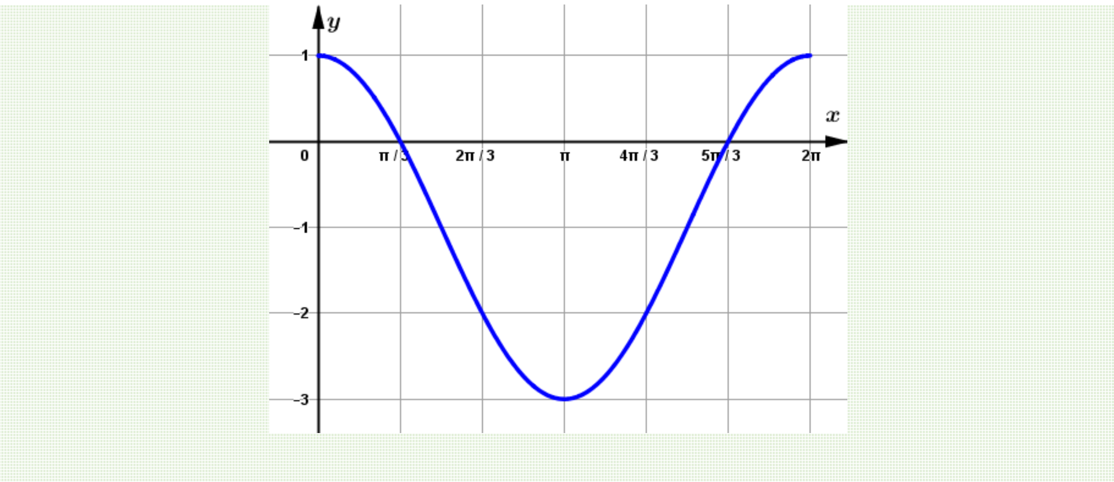
Mínimo:

$$2\cos(x) - 1 = -3$$
$$2\cos(x) = -3 + 1 = -2$$
$$\cos(x) = -1$$
$$\boxed{x \doteq \pi}$$

Máximo

$$2\cos(x) - 1 = 1$$
$$2\cos(x) = 1 + 1 = 2$$
$$\cos(x) = 1$$
$$\boxed{x = 0 \quad \vee \quad x = 2\pi}$$

Con todos estos datos, ya estamos en condiciones de realizar su gráfica,



3.10.3. Función tangente

Se llama función tangente a todas aquellas que tienen la forma,

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = a \tan(bx)$$

con $\forall a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0; b \neq 0$

Recordemos que,

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

La función tangente no está definida donde el coseno se hace cero, es decir, el argumento de la función debe ser distinto de los múltiplos enteros impares de $\pi/2$.En esos valores la función no está definida, pero se acerca tanto como uno desee a ese valor.
Por lo tanto, no está definida en:

$$x \ = \ \frac{(2k+1)\pi}{2b}; \ b \neq 0; \ k \in \mathbb{Z}$$

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2b}; b \neq 0; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Las raíces de la función tangente están en los puntos de la forma $\left(\frac{k\pi}{b}; 0\right)$
Coincidiendo con las raíces de la función seno.
La imagen de la función tangente son todos los números reales.

$$Im\,(f) = \ \mathbb{R}$$

En la Figura 13, representamos el gráfico de la función $f(x) = \tan(x)$.

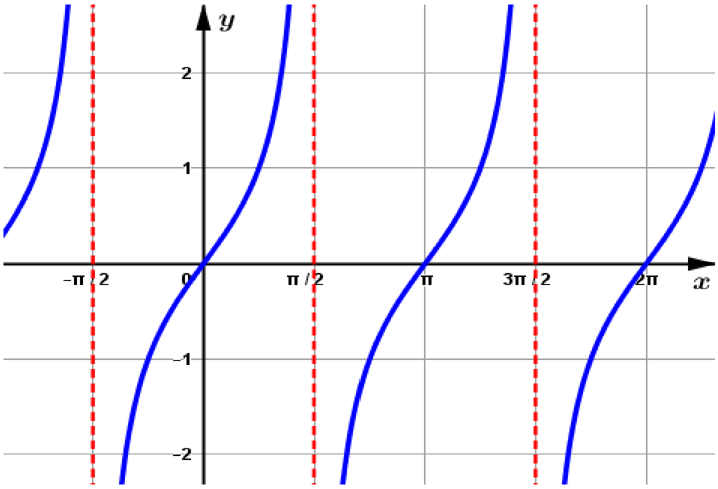


Figura 13

Ejemplo 27: *Hallar a y b* $\in \mathbb{Z}$*: sabiendo que* $h(x) = a \cdot tan(bx)$ *pasa por los puntos:*

$$\left(\frac{\pi}{4}; -1\right) \; y \; (-\pi; 0)$$

Si la función pasa por los puntos dados, quiere decir que se debe cumplir:

$$h(-\pi) = 0 = a \cdot \tan(b(-\pi))$$

O sea que tiene raíz en $(-\pi)$ y las raíces de la tangente son de la forma

$$\left(\frac{k\pi}{b}; 0\right)$$

Es decir, múltiplos de $\frac{\pi}{b}$ entonces $\boxed{\boldsymbol{b = -1}}$.
Reemplazamos en la segunda otra condición:

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 = a \cdot \tan\left((-1)\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-1 = a \cdot \tan\left(-1\frac{\pi}{4}\right) = a(-1)$$

Entonces $\boxed{\boldsymbol{a = 1}}$

$$\boxed{h(x) = -\tan(-x)}$$

3.10.4. Función cotangente

Se llama función cotangente a todas aquellas que tienen la forma,

$$f: A \to \mathbb{R} / f(x) = \cot(x)$$

Recordemos que

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Y por lo tanto, el dominio de esta función son todos los números reales menos los ceros del seno, es decir:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{k\pi\} \; con \; k \in \mathbb{Z}$$

En el caso de la imagen, no existe ninguna restricción:

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Para hallar las raíces, el argumento debe ser igual a un múltiplo impar de $\pi/2$.

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

El gráfico de la función $f(x) = \cot(x)$ se muestra en la Figura 14.

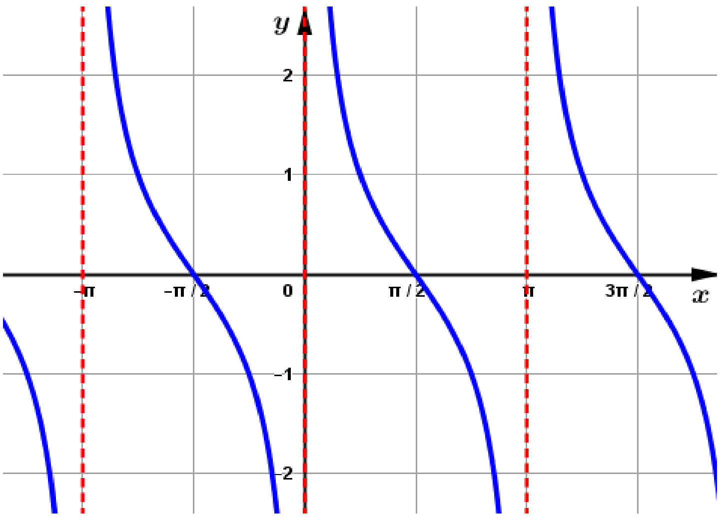


Figura 14

Ejemplo 28: *Hallar dominio, imagen, raíces y gráfico de*

$$f(x) = \cot\left(\frac{x}{2}\right)$$

Como

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{sen\left(\frac{x}{2}\right)} \quad y \quad sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Para

$$\left(\frac{x}{2}\right) = k\pi \rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 2k\pi}}\ con\ k \in \mathbb{Z}$$

Entonces,

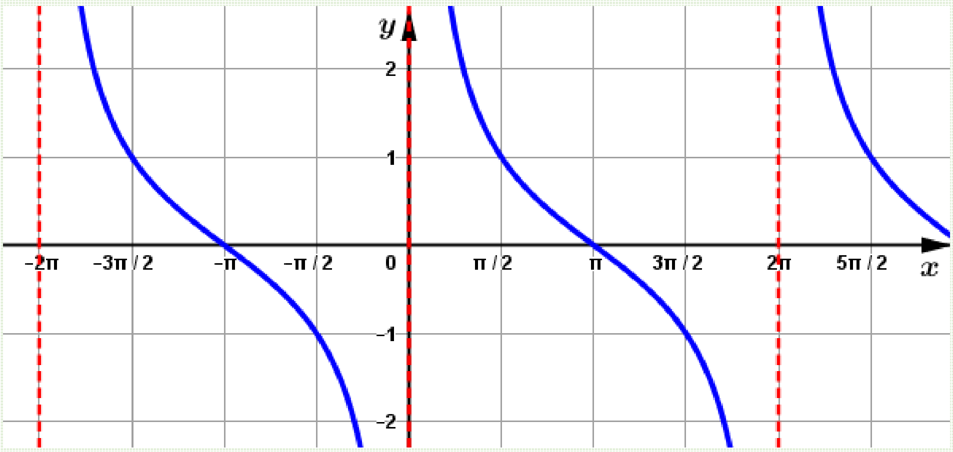
$$\boxed{\boldsymbol{Dom(f) = \mathbb{R} - \{2k\pi\}}}\ con\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Im(f) = \mathbb{R}}}$$

Las raíces de $f(x)$ coinciden con las de $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, es decir, el argumento debe ser igual a un múltiplo impar de $\pi/2$

$$\left(\frac{x}{2}\right) = (2k+1)\pi \rightarrow x = 2(2k+1)\pi = 2k'\pi \quad con\ k\ y\ k' \in \mathbb{Z}$$

Entonces las raíces son los múltiplos pares de π, $\boxed{\boldsymbol{C_0 = \{2k'\pi\}}}$



3.10.5. Función cosecante

Se llama función cosecante a todas aquellas que tienen la forma,

$$f: A \to \mathbb{R} / f(x) = \csc(x)$$

Recordando que

$$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

El dominio de la función son todos los números reales menos los ceros del seno, es decir:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{k\pi\}\ con\ k \in \mathbb{Z}\,; b \neq 0$$

En el caso de la imagen, queda definida como,

$$Im(f) = \ \mathbb{R} - (-1; 1)$$

Una de las particularidades de esta función, es que no tienen intersecciones con el eje de abscisas. En otras palabras, no tiene raíces.
Podemos observar la gráfica de la función $f(x) = \csc(x)$ en la Figura 15.

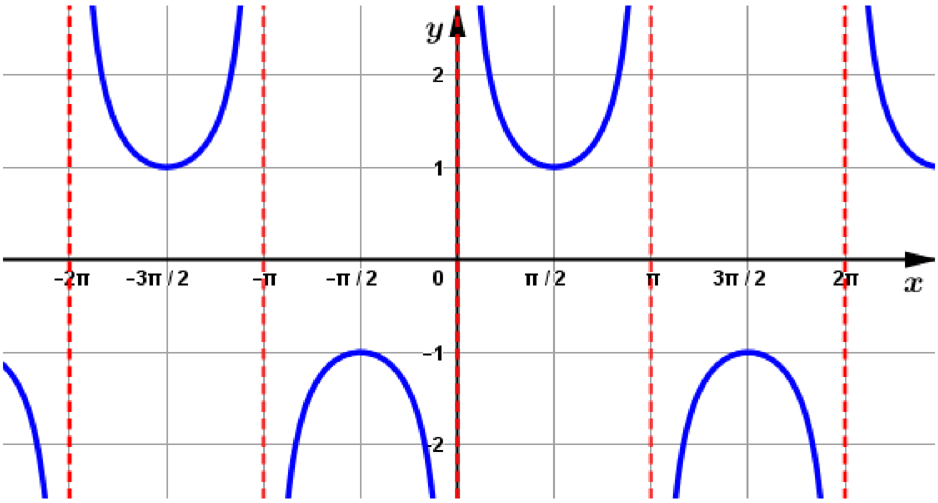


Figura 15

3.10.6. Función secante

Se llama función secante a todas aquellas que tienen la forma,

$$f: A \to \mathbb{R} / f(x) = \sec(x)$$

Teniendo en cuenta que

$$\sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$$

el dominio de la función son todos los números reales menos los ceros del coseno, es decir,

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \; con\; k \in \mathbb{Z}\,; b \neq 0$$

Su imagen se define como,

$$Im(f) = \mathbb{R} - (-1; 1)$$

Al igual que la cosecante, esta función no tiene raíces.

El gráfico de la función $f(x) = \sec(x)$ se muestra en la Figura 16.

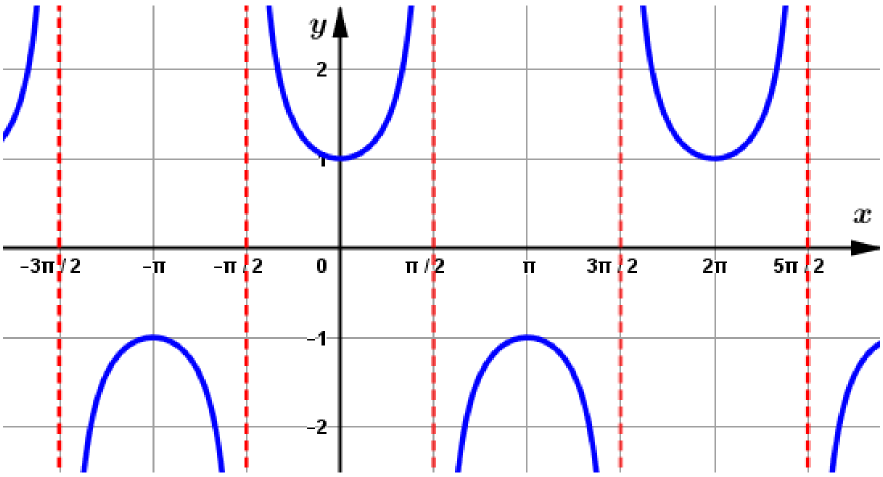


Figura 16

Ejemplo 29: *Hallar dominio, imagen, raíces y gráfico de* $f(x) = sec\left(\frac{x}{2}\right)$

Como

$$\sec\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad y \qquad cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Para

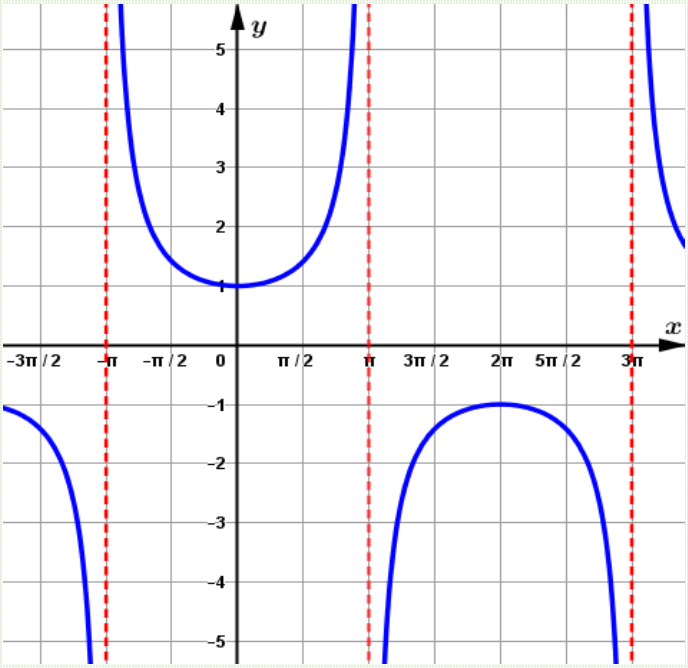
$$\left(\frac{x}{2}\right) = k\frac{\pi}{2} \implies x = k\pi \; con \; k \in \mathbb{Z}$$

Entonces

$$\boxed{\boldsymbol{Dom(f) = \mathbb{R} - \{k\pi\}}} \; con \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Im(f) = \mathbb{R} - (-1;1)}}$$

No tiene raíces ya que $\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ nunca es cero.



3.11. Aplicaciones físicas

3.11.1. MRU

Posición en función del tiempo

En el capítulo anterior, analizamos el movimiento rectilíneo uniforme (MRU), desde el punto de vista de su ecuación horaria. Ahora lo haremos desde el punto de vista funcional.

Como lo planteamos oportunamente, una vez fijado un sistema de referencia adecuado, este tipo de movimiento corresponde a un móvil que se desplaza en línea recta con una velocidad constante y su posición depende del tiempo transcurrido. Es decir, que la posición es una **"función"** del tiempo.

Si observamos la llamada ecuación horaria,

$$x(t) = x_i + v \cdot (t - t_i)$$

Siendo v la velocidad constante y x_i una posición dada inicial para el tiempo t_i. La variación de la posición dependerá solo de la variación del tiempo, es decir, es una **función lineal** $x = f(t)$.

Por ejemplo, si partimos del kilómetro 180 medido desde un punto de referencia fijo, en una trayectoria recta, a las $8\,h$, con una velocidad constante de $80\,km/h$ en la dirección positiva de nuestro sistema de referencia, y quisiéramos conocer nuestra posición para cualquier instante de tiempo, tendremos que hacer,

$$x(t) = 180\,km + 80\,\frac{km}{h} \cdot (t - 8\,h)$$
$$x(t) = 180\,km + 80\,\frac{km}{h} \cdot t - 80\,\frac{km}{h} \cdot 8\,h$$
$$x(t) = 180\,km - 640\,km + 80\frac{km}{h} \cdot t$$
$$x(t) = -460\,km + 80\,\frac{km}{h} \cdot t$$

Es importante observar que, en este caso, al no partir de $t = 0\,h$, $180\,km$ no es la ordenada al origen de la recta, que corresponde a la posición para $t = 0\,h$. Sería,

$$x(0\,h) = 180\,km + 80\frac{km}{h} \cdot (0\,h - 8\,h)$$
$$x(0\,h) = -460 km$$

Este valor lo podemos interpretar como que a las 0 horas se encontraba a 460 km del kilómetro cero, pero en la dirección contraria al sentido de avance del auto (recordemos que todo empieza a las 8 horas, esto es solo una interpretación de la situación).
En este caso, el tiempo cero no coincide con el kilómetro cero. En la Figura 17 tenemos un esquema de nuestro problema.

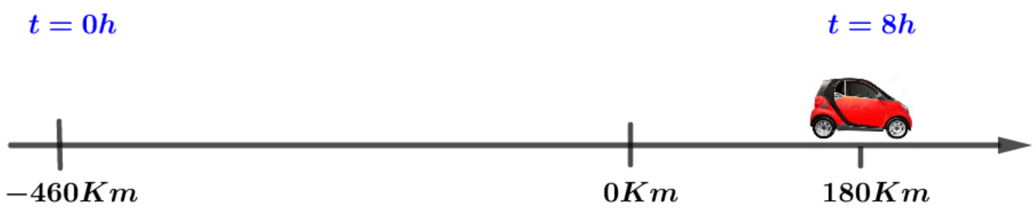


Figura 17

Y en la Figura 18 podemos ver representada la ecuación horaria correspondiente al mismo:

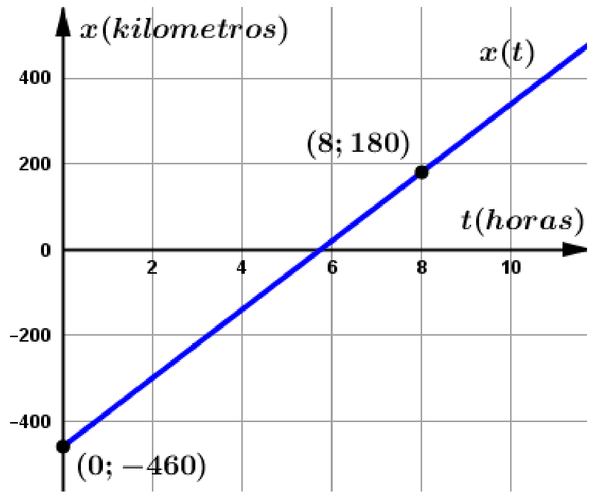


Figura 18

Desde el punto de vista matemático, una función lineal tiene como dominio todos los números reales. Pero para nuestro problema físico en particular, conocemos nuestra trayectoria a partir de las 8 h, por lo que deberíamos restringir nuestro dominio, quedándonos solo con los tiempos mayores a 8 h. Por otro lado, lo usual es tomar siempre tiempos positivos.
De esta manera, su dominio restringido es $t \in [8; +\infty)$ y su imagen $x \in [180; +\infty)$
Esto nos permitirá conocer nuestra posición para cualquier instante futuro, desde la partida hasta tiempo infinito (ver Figura 19). Aunque no manejemos tanto…

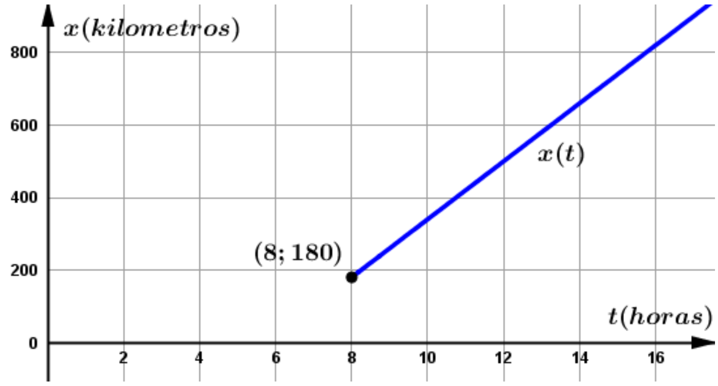


Figura 19

Movimiento Rectilíneo Uniforme: Velocidad

Como señalamos anteriormente, en el MRU la velocidad es constante, por lo que, si queremos representar la velocidad como una función, será una *función lineal con pendiente cero*. Es decir, su gráfica será una recta paralela al eje de las abscisas. Para el caso analizado de nuestro móvil con posición en función del tiempo, tenemos que:

$$x(t) = 180\ km + 80\ \frac{km}{h} \cdot (t - 8h)$$

La velocidad en función del tiempo será

$$v(t) = 80\ \frac{km}{h}$$

Con dominio $t \in [8; +\infty)$ e imagen $v \in \{80\}$
La gráfica de velocidad la podemos observar en la Figura 20.

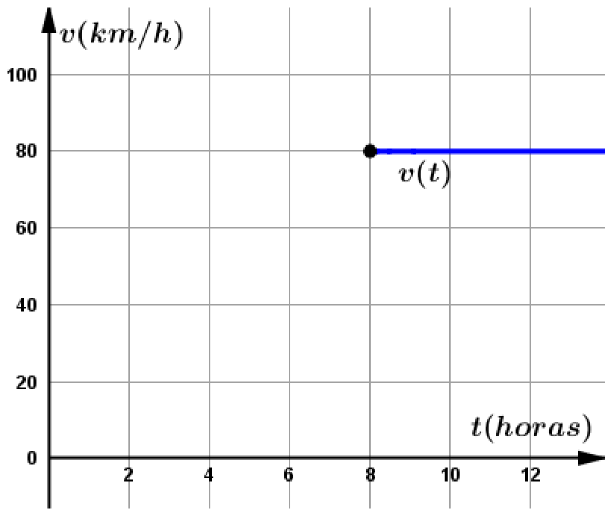


Figura 20

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado: Velocidad en función del tiempo

Mientras que en el MRU la velocidad es constante, en el Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV) habíamos visto que la velocidad no lo es: también es una función lineal dependiente del tiempo que sigue la siguiente ecuación horaria,

$$v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_i)$$

En el caso de la caída libre, por ejemplo, si dejamos caer desde una altura dada un cuerpo, y despreciamos el rozamiento con el aire, este caerá con una velocidad inicial nula. Esta velocidad se irá incrementando por la acción de la aceleración de la gravedad a lo largo del tiempo. Recordemos que los signos de cada magnitud dependerán de nuestro sistema de referencia. En este caso, puede ser conveniente elegir un sistema de referencia en el sentido del movimiento (ver Figura 21).

$$v = v_0 + g \cdot (t - t_i) \quad \text{con } |g| = 10 \ \frac{m}{s^2}$$

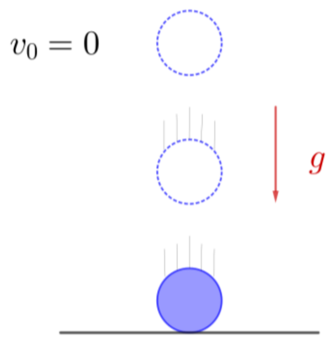


Figura 21

Vale aclarar que la aceleración de la gravedad es un vector que apunta hacia el centro de la Tierra. Nosotros analizaremos el problema en forma escalar, ya que el movimiento se dará en una sola dirección: la recta que une el punto desde el que soltamos el objeto con el centro de la Tierra. Si elegimos un sistema de referencia con el sentido positivo hacia el centro de la Tierra, consideraremos $g = 10\ m/s^2$. Mientras que, si optamos el sistema de referencia en sentido contrario, tendremos $g = -10\ m/s^2$.
La velocidad será positiva en nuestro sistema de referencia, al igual que la aceleración de la gravedad. La aceleración le va a agregar al valor absoluto de nuestra velocidad 10 m/s por cada segundo en el que actúe. Es decir, en 10 segundos la aceleración le agregaría 100 m/s a dicha magnitud, motivo por el cual pasamos de 0 m/s a 100 m/s en 10 segundos de caída libre.

La velocidad inicial es cero y el tiempo inicial también.
Entonces, la velocidad en función del tiempo nos queda:

$$v(t) = 10\ \frac{m}{s^2} \cdot t$$

Su gráfica la podemos observar en la Figura 22.

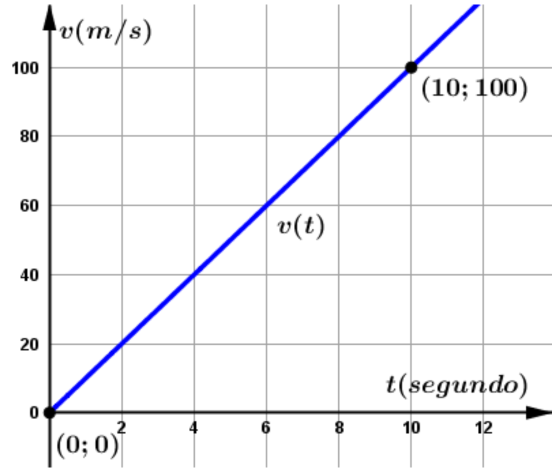


Figura 22

Ejemplo 30: *Para la trayectoria graficada en la Figura 22, indicar el valor de la velocidad a los 5 segundos de iniciada la caída.*

De la gráfica podemos estimar que a los 5 segundos el móvil tendrá una velocidad de 50 m/s. Esta componente será positiva, ya que coincide con la dirección de mi sistema de referencia.
Verifiquemos si esto es así con la ecuación obtenida anteriormente:

$$v = v_0 + g \cdot (t - t_i)$$

En nuestro caso

$$v(5\ s) = 0\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s^2} \cdot (5\ s - 0\ \mathrm{s})$$

$$\boxed{\boldsymbol{v(5\ s) = 50\frac{m}{s}}}$$

Que coincide con el valor estimado de la gráfica.

3.11.2. MRUV

Posición en función del tiempo

Retomemos el caso de la caída libre. Habíamos visto que, si dejamos caer desde una altura dada un cuerpo caerá con una velocidad inicial nula. Esta velocidad se irá incrementando por la acción de la aceleración de la gravedad a lo largo del tiempo, a razón de 10 m/s por cada segundo en el que actúe.
En este caso, la posición será función del tiempo mediante la expresión,

$$x(t) = x_i + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Observemos que mientras en el MRU la posición en función del tiempo $x = f(t)$ es una función lineal, en el MRUV es una **"función cuadrática"**.
Supongamos que dejamos caer un cuerpo desde una altura inicial de 0 m, ya que elegimos un sistema de referencia hacia abajo con el origen en el punto de partida del objeto, la posición en función del tiempo será,

$$x(t) = 5 \ \frac{m}{s^2} t^2$$

El dominio es el intervalo de tiempo entre el momento inicial $t = 0$ y el momento en el que toca el suelo t_s, es decir, $t \epsilon [0;\ t_s)$ y la imagen, por lo tanto, será el intervalo que representa la distancia recorrida desde que empieza a caer hasta que llega al suelo $x \epsilon [0; s\ )$.
Su gráfica se ve reflejada en la Figura 23. Así, por ejemplo, a los 2 segundos de caída, el cuerpo habrá recorrido 20 m

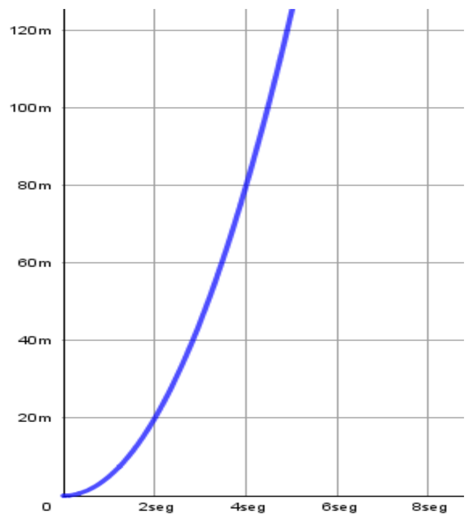


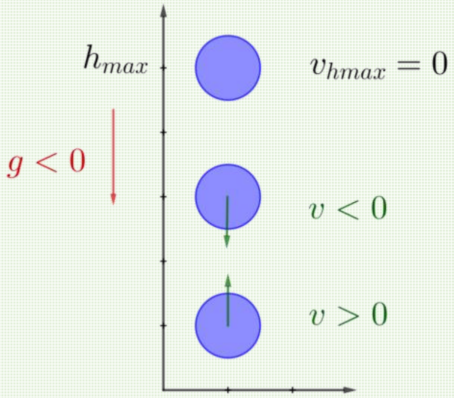
Figura 23

Ejemplo 31: *Se lanza un objeto hacia arriba con una velocidad inicial de* $30\ m/s$. *La altura en función del tiempo está dada por la función.*

$$h(t) = x_i + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto? ¿Cuánto tarda en alcanzarla? (Para los cálculos tomar $|a| = |g| = 10\ m/s^2$*)*

En este caso, vamos a considerar un sistema de referencia positivo para arriba y con el cero de la posición en el suelo $x_i = 0$.
Mientras el objeto sube, las velocidades son positivas y al bajar negativas. La velocidad inicial es dato: $v_0 = 30\ m/s$. Como la aceleración de la gravedad apunta al centro de la tierra, en este caso y según nuestro sistema de referencia, será negativa: $a = -10\ m/s^2$



La función que nos da la altura, en función del tiempo, es:

$$h(t) = 30\ \frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

Resolviendo, nos queda:

$$h(t) = 30 \frac{m}{s} \cdot t - 5\ \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

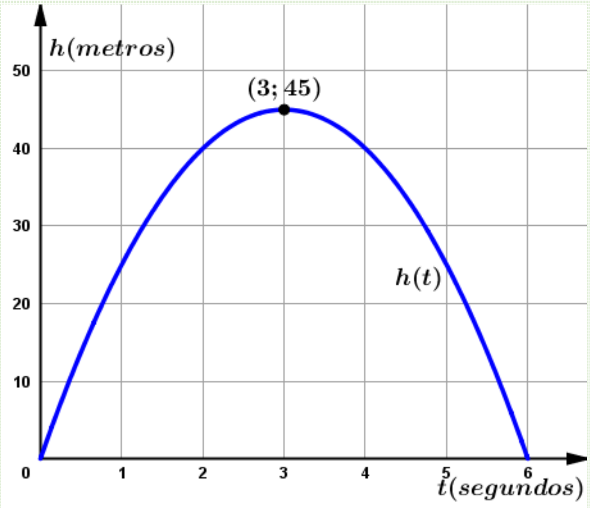
La altura máxima la alcanza en el vértice de la parábola.

$$t_v = \frac{-30 \frac{m}{s}}{2 \cdot \frac{(-5)m}{s^2}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{t_v = 3\ s}}$$

Para encontrar la altura máxima, reemplazamos el tiempo encontrado en la función.

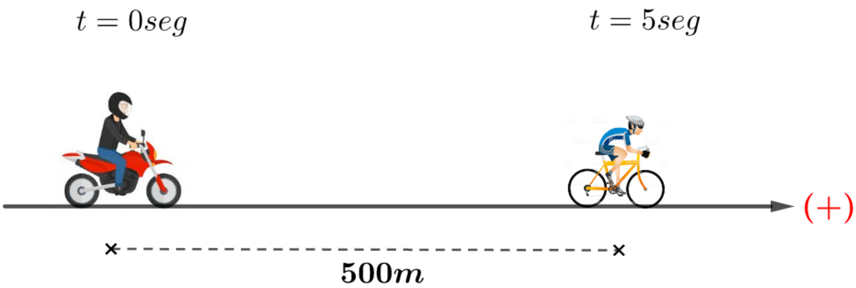
$$h_{máx} = f(3) = \quad 30\frac{m}{s} \cdot 3\ s - 5\frac{m}{s^2} \cdot (3\ s)^2$$
$$h_{máx} = 90\ m - 45\ m \implies \boxed{\boldsymbol{h_{máx} = 45\ m}}$$

Por lo tanto, la altura máxima alcanzada es de 45 m y tardó en alcanzarla 3 segundos.
El gráfico de la altura en función del tiempo es una **parábola** cóncava hacia abajo que podemos ver en la siguiente Figura.



Encuentro

Los denominados ***problemas de encuentro*** son de los más clásicos en la Física elemental. Básicamente consisten en determinar la intersección de dos funciones asociadas a al movimiento de dos objetos.
Supongamos que una moto parte del reposo con una aceleración de 1 m/s^2 en línea recta. Cinco segundos más tarde, 500 metros más adelante, parte una bicicleta con una velocidad constante de 36 km/h con un movimiento que tiene la misma dirección y sentido que la moto.



¿En qué momento se producirá el encuentro? ¿En qué posición se encuentran?

En primer lugar, observemos que tenemos dos tipos de movimientos diferentes. Por un lado, la moto se desplaza con un MRUV. Por lo tanto, su desplazamiento está expresado por

$$x_m(t) = x_i + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Por el otro, la bicicleta se mueve con MRU, y por lo tanto la posición en función del tiempo se expresa como,

$$x_b(t) = x_i + v \cdot (t - t_i)$$

Si elegimos un sistema de referencia con origen en el punto de partida de la moto, tendremos $x_i = 0, v_0 = 0 \; y \; a = 1 \; m/s^2$
La ecuación para la moto será

$$x_m(t) = \frac{1}{2} \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

Mientras que para la bicicleta tendremos posición inicial $500 \, m$ y tiempo inicial de 5 segundos con velocidad 36 km/h.
Para trabajar con unidades homogéneas deberemos realizar la siguiente conversión de unidades:

$$36 \; \frac{km}{h} = \frac{36 \cdot 1000 \, m}{3600 \, s} = 10 \frac{m}{s}$$

Finalmente, la ecuación de la bicicleta será

$$x_b(t) = 500 \, m + 10 \frac{m}{s} \cdot (t - 5 \, s)$$

Tenemos, entonces, para el momento del encuentro que las posiciones son las mismas. Averigüemos para que tiempo ocurre esta situación igualando las ecuaciones de movimiento.

$$x_m(t) = x_b(t)$$
$$\frac{1}{2} \frac{m}{s^2} t^2 = 500 \, m + 10 \; \frac{m}{s} \cdot (t - 5 \, s)$$

$$\frac{1}{2}\frac{m}{s^2}t^2 = 500\ m + 10\frac{m}{s}t - 50\ m$$

$$\frac{1}{2}\frac{m}{s^2}t^2 - 10\frac{m}{s}t - 450\ m = 0$$

La última es una ecuación de segundo grado en t. Aplicando la resolvente de la cuadrática, obtenemos como solución dos tiempos:

$$t_1 = -21{,}62\ s\ \ y\ \boxed{\boldsymbol{t_2 = 41{,}62\ s}}$$

Como consideramos el movimiento a partir de $t = 0$, descartamos la primera solución. Es decir, los móviles se encontrarán a los 41,62 segundos a partir de que la moto se pone en movimiento.
Para saber la posición de los móviles, basta con reemplazar el tiempo obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones de movimiento.

$$x_m(41{,}62\ s) = \frac{1}{2}\frac{m}{s^2}(41{,}62s)^2 \cong \boxed{\boldsymbol{866\ m}}$$

Es recomendable verificar en ambas ecuaciones del movimiento.

$$x_b(41{,}62s) = 500m + 10\frac{m}{s}\cdot(41{,}62\ s - 5\ s) \cong 866\ m$$

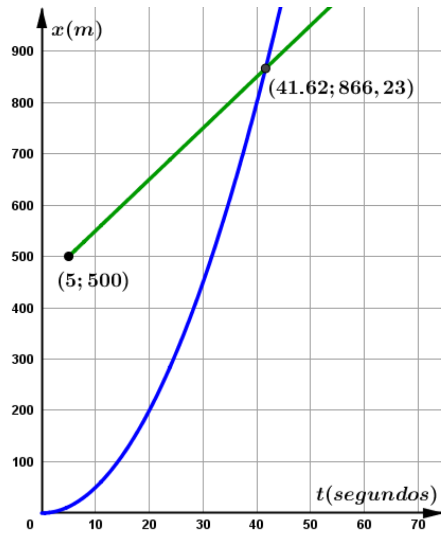


Figura 24

Los móviles se encontrarán a los 41,62 segundos a partir de que la moto se pone en movimiento, 866 m más adelante de ese punto.
Podemos hallar gráficamente el punto de encuentro representando ambas funciones y buscando el punto de intersección.

3.12. Actividades del capítulo

1. Determinar cuáles de los siguientes gráficos son funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Justificar. Para aquellas que sean funciones hallar el conjunto imagen.

Gráfico 1

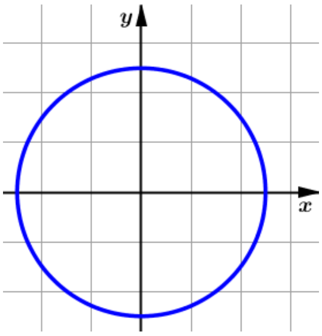


Gráfico 2

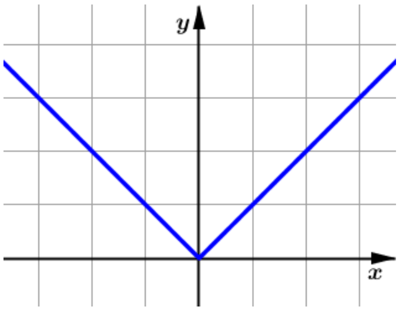


Gráfico 3

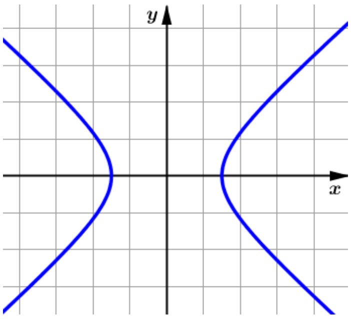
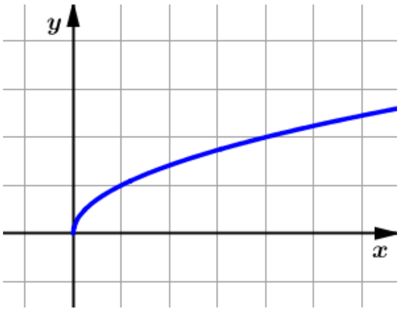


Gráfico 4



2. Juan trabaja en una empresa de distribución de paquetes, cobra un salario fijo y \$250 por paquete entregado. Si su salario fijo es de \$8.500. Completar la tabla con los posibles salarios después de vender "x" paquetes.

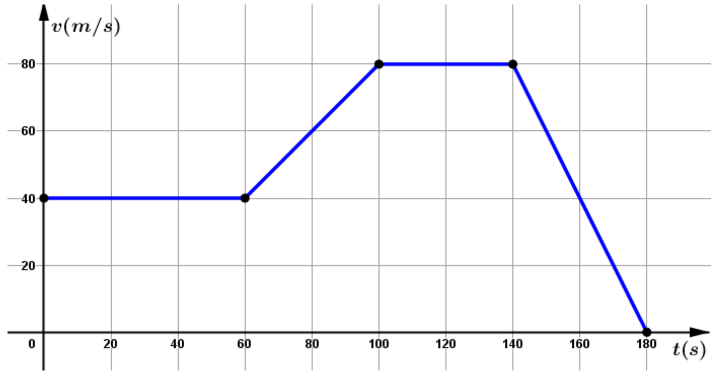
Cantidad de paquetes	**Salario**
0	
1	
2	
3	
4	
5	
x	

(a) ¿Qué valores puede tomar la variable independiente (cantidad de paquetes)?

(b) ¿Qué valores puede tomar la variable dependiente (salario)?

(c) Realizar un gráfico que represente la situación.

3. A partir de la siguiente gráfica de la velocidad en función del tiempo:



(a) Indicar qué tipo de movimiento ocurre en cada tramo.
(b) Determinar el valor de la aceleración en cada tramo.

4. Sebastián sale de viaje en auto. Durante las primeras dos horas viaja a 85 km/h, luego para 15 minutos en una estación de servicio para cargar combustible. A continuación, sigue conduciendo durante tres horas y media a 90 km/h cuando se da cuenta que tiene un neumático bajo y necesita cambiarlo. Tarda media hora en hacerlo. Luego sigue conduciendo durante 40 minutos a 75 km/h hasta que llega a destino. Realizar un gráfico que represente la distancia recorrida en función del tiempo y otro gráfico que represente la velocidad en función del tiempo.

5. ¿Cuáles de las siguientes fórmulas representan funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Si no lo son, hallar un dominio adecuado para que lo sean.
(a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+9}$
(b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-9}$
(c) $f(x) = x^3 - 2x + 1$
(d) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$
(e) $f(x) = \sqrt{3-x}$

6. Para cada una de las siguientes funciones, determine el dominio
(a) $f(x) = \sqrt{2 - x} + logx$
(b) $g(x) = \frac{x-3}{x-1} + log(x + 2)$
(c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1} + log(-x)$

7. Para cada una de las siguientes funciones, determine el dominio y las raíces
(a) $f(x) = \sqrt{2x - 1} - 3$

(b) $g(x) = log2(-2x - 7)$

8. Hallar dominio, ordenada al origen y raíces de las siguientes funciones:
   (a) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} + 3$
   (b) $f(x) = \sqrt{3-x} - 5$
   (c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 2$
   (d) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

9. Hallar el dominio, intersección con el eje de ordenadas y ceros de las siguientes funciones:
   (a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3}$
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x-12}$
   (c) $f(x) = \dfrac{5}{x+5}$
   (d) $f(x) = \dfrac{5-2x}{x^2+9}$

10. Hallar los ceros y ordenada al origen de las siguientes funciones:
   (a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$
   (b) $f(x) = (x+3)/(x^2-1)$
   (c) $f(x) = log_2(x+3)$
   (d) $f(x) = e^{2x-1} - 1$
   (e) $f(x) = (x-1)^2 + 3$

11. Representar las siguientes funciones. ¿Cuáles son biyectivas?
   (a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2 - 2x$
   (b) $f: [0;2] \to [-1;0] / f(x) = x^2 - 2x$
   (c) $f: [1;4] \to [-1;8] / f(x) = x^2 - 2x$
   (d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \dfrac{1}{3}x + 1$
   (e) $f: (-3;6) \to \mathbb{R} / f(x) = \dfrac{1}{3}x + 1$
   (f) $f: (-3;6) \to (0;3) / f(x) = \dfrac{1}{3}x + 1$

12. Hallar la función inversa de las funciones biyectivas del ejercicio 11.

13. Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$.

    (a) $f(x) = 2x + 3 \quad g(x) = \sqrt{x} - 4$

    (b) $f(x) = -(x+1)^2 - 1 \quad g(x) = 2 - x$

    (c) $f(x) = x^3 \quad g(x) = x + 3$

14. Encontrar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que:

    (a) $f \circ g(x) = 3\sqrt{2x+1}$

    (b) $f \circ g(x) = sen^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

    (c) $f \circ g(x) = \frac{3}{x+1} - 1$

15. Graficar las siguientes funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calcular las raíces, ordenada al origen y función inversa.

    (a) $f(x) = 3x - 4$

    (b) $f(x) = 2 - x$

    (c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

    (d) $f(x) = -2x$

16. Sabiendo que $f(x) = ax + b$ vincular, si es posible, la pendiente y ordenada al origen, de cada ítem, con el gráfico correspondiente.

    (a) $a > 0$ y $b > 0$

    (b) $a > 0$ y $b < 0$

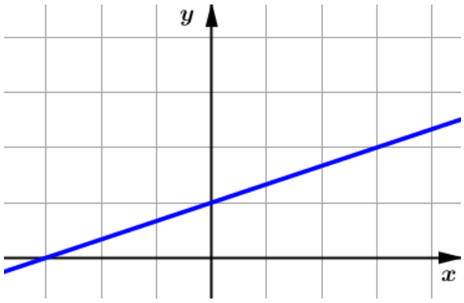
    (c) $a > 0$ y $b = 0$

    (d) $a < 0$ y $b > 0$

    (e) $a < 0$ y $b < 0$

    (f) $a < 0$ y $b = 0$

Gráfica 1



Gráfica 2

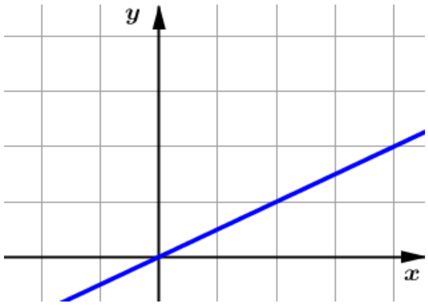
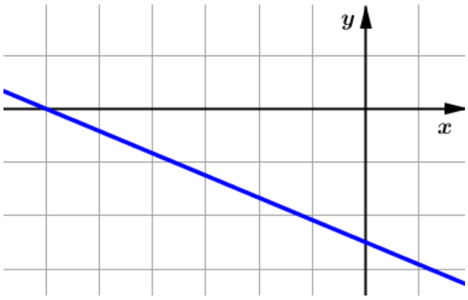
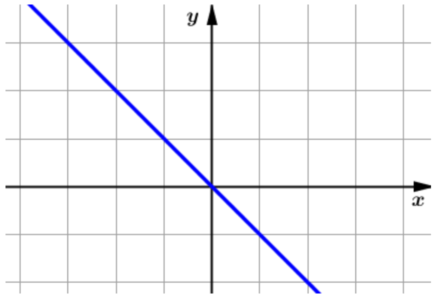


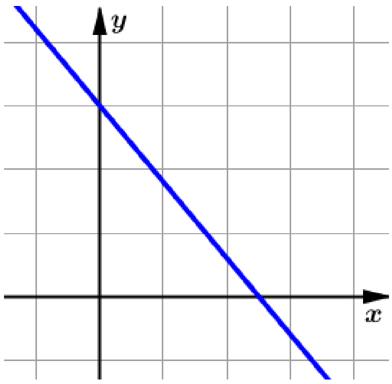
Gráfico 3



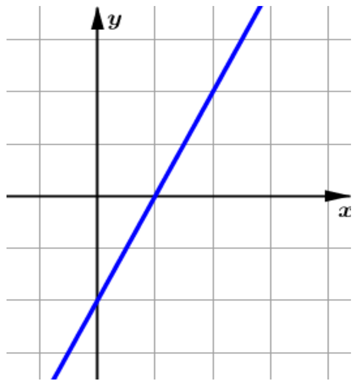
Gráfica 4



Gráfica 5



Gráfica 6



17. Hallar las funciones lineales cuyos gráficos son las rectas que cumplen las condiciones dadas, graficar y calcular sus raíces.
    (a) La recta que pasa por los puntos $(2; -4)$ y $(-1; 2)$.
    (b) Tiene raíz en $x = 3$ y ordenada al origen -2.
    (c) La pendiente es $1/2$ y pasa por el punto $(-1; -1)$.
    (d) La pendiente y la ordenada al origen son opuestas y pasa por el punto $(2; 3)$.

18. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1; 1)$ y es perpendicular a la recta que tiene ordenada al origen -2 y pasa por el mismo punto.

19. Escribir la función lineal cuyo gráfico es una recta horizontal que pasa por el punto $(-1; 3)$.

20. Hallar el vértice, raíces, conjunto imagen y ordenada al origen de las siguientes funciones:
    (a) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 4$ (b) $f(x) = x^2 + x + 1$

(c) $f(x) = -2x^2 + 8$

(d) $f(x) = 3x^2 + 6x$

(e) $f(x) = -x^2 + x - 6$

(f) $f(x) = 0{,}5(x + 6)(x - 3)$

21. Siendo $f(x) = 3(x + 2k)(x - 2)$ hallar k para que se cumplan las siguientes condiciones:
    (a) El vértice de sea $V = (3; 6)$.
    (b) La ordenada al origen sea 1.
    (c) $f(-1) = 15$

22. La imagen de $f(x) = -2x^2 + 8x - 12$ es:
    (a) $[-1; \infty)$
    (b) $(-\infty; -1]$
    (c) $\mathbb{R}$
    (d) Ninguna de las opciones anteriores.

    Graficar la función.

23. Se hizo un estudio en una empresa para saber la cantidad de personas que se enteran de un rumor después de cierta cantidad de días. La función que nos permite conocer dicha cantidad es:
$$R(t) = k \cdot 2^t$$
donde k es la cantidad de personas que inician el rumor. Si tres empleados inician el rumor y en la empresa hay 253 empleados, ¿cuánto tardan en enterarse todos del rumor?

24. Hallar conjunto imagen, raíces, ordenada al origen y gráfico de las siguientes funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
    (a) $f(x) = 3^x$
    (b) $f(x) = 3^{-x}$
    (c) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$
    (d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

25. Hallar la función exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/ f(x) = ka^x$ que pasa por los puntos $\left(1; \frac{2}{3}\right)$ y $(-1; 6)$.

26. Hallar dominio e imagen de las siguientes funciones. Encontrar la función inversa. Componer la función con su inversa.

(a) $f(x) = \frac{2}{3} \cdot 3^{x-1}$

(b) $f(x) = log_{\frac{1}{2}}(x + 4)$

27. Hallar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen y gráfico de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = log_2(2x - 1)$

(b) $f(x) = log_{\frac{1}{3}}(x + 4)$

(c) $f(x) = log\, x + 1$

(d) $f(x) = ln(x - 3) - 2$

28. Hallar a y b en las siguientes funciones:

(a) $f(x) = a \cdot sen(bx)$ sabiendo que pasa por los puntos

$$(\pi; 1)\ y\ \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$$

(b) $g(x) = a \cdot cos(bx)$ sabiendo que pasa por los puntos:

$$(\pi; 1)\ y\ (0; 2)$$

29. Hallar dominio, imagen, raíces y gráfico de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 2\,\text{sen}(3x)$

(b) $f(x) = -\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

(c) $f(x) = \frac{1}{3}\text{sen}(x)$

(d) $f(x) = 3\cos(x)$

(e) $f(x) = \frac{2}{3}\cos(2x)$

(f) $f(x) = -2\cos\left(\frac{1}{4}x\right)$

(g) $f(x) = 2\tan(3x)$

(h) $f(x) = -\frac{2}{3}\tan(x)$

30. Representar gráficamente la función

$$f(x) = 3\,\text{sen}(x)\ \ con\ Dom(f) = [-\pi;\ \pi]$$

e indicar el conjunto imagen y los ceros.

31. Representar gráficamente la función

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)\ \ con\ Dom\ (f) = [-2\pi; 2\pi]$$

e indicar el conjunto imagen y los ceros.

32. Desde la terraza de un edificio se lanza una pelota. La posición de la pelota en función del tiempo está dada por la fórmula

$$f(t) = -\frac{1}{3}(t-3)^2 + 12$$

Calcular:

(a) La altura desde la que se lanzó la pelota.

(b) La altura máxima alcanzada y el tiempo que tarda en lograrlo.

(c) ¿Cuánto tarda en llegar al piso?

33. Un cuerpo cae libremente desde el reposo. Calcular:

(a) La distancia recorrida en 3 s.

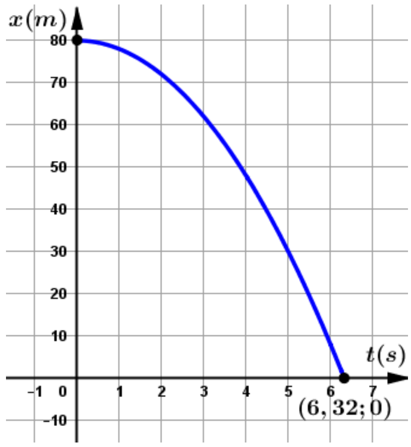
(b) La velocidad después de haber recorrido 100 m.

(c) El tiempo necesario para alcanzar una velocidad de 25 m/s.

(d) El tiempo necesario para recorrer 300 m, desde que cae.

(e) Graficar la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo

34. Para la siguiente gráfica de la posición en función del tiempo:



Sabiendo que la velocidad inicial es 0 (cero), determinar las ecuaciones horarias del movimiento.

35. Un automóvil se desplaza con una velocidad de 72 km/h y el conductor aplica el freno deteniéndose luego de recorrer 100 metros. Determine:

(a) Cuál fue la aceleración, supuesta constante, que debió aplicarse

(b) Cuánto tiempo duró el proceso.

(c) Grafique posición, velocidad y aceleración en función del tiempo para el movimiento descripto.

36. Dos móviles se mueven en la misma dirección y sentidos opuestos, acercándose. El móvil A se mueve con una velocidad constante de 50

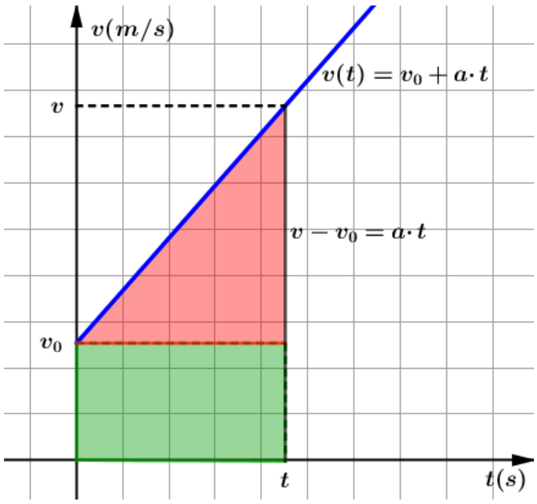
m/s. El móvil B parte simultáneamente del reposo 10 km más adelante, con una aceleración cuyo valor absoluto es de 2 m/s^2.Determinar:

(a) ¿En qué momento se producirá el encuentro?

(b) ¿En qué posición se encuentran?

(c) Graficar para ambos móviles la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

37. En un MRUV, conocido el gráfico de velocidad en función del tiempo, se puede determinar el espacio recorrido por el móvil a partir del cálculo de áreas. (Sugerencia calcule el $área\,sombreada = triángulo + rectángulo$)



38. Un auto parte del reposo con una aceleración constante de $3\,m/s^2$, simultáneamente parte un camión que circula con una velocidad constante de $54\,km/h$ en la misma dirección y sentido contrario de un lugar que está a 300 m. Determinar de forma gráfica y analítica, a que distancia desde el punto de partida del auto este alcanza al camión y el tiempo que requiere para hacerlo.

39. Un tren avanza por una vía recta con una velocidad de $144\,km/h$. De pronto el conductor ve una vaca cruzada en la vía a una distancia de 70 m. Al instante aplica el freno, provocando una desaceleración de $10\,m/s^2$. ¿El tren atropella a la vaca? Justifique su respuesta y grafique la posición en función del tiempo para el tren y para la vaca en un mismo sistema de ejes coordenados

40. En una esquina, un radar detecta a un vehículo que se desplaza a 20 m/s. 10 segundos después, el mismo radar detecta a una patrulla que

pasa persiguiéndolo a una velocidad de 30m/s. Considerando que ambos mantienen su velocidad constante:

(a) ¿A qué distancia del radar la patrulla alcanzará al coche?
(b) ¿En qué instante se producirá el encuentro?

Respuestas de las Actividades

Capítulo 1

1.
   (a) Rta.: $\frac{3}{5}x^3$
   (b) Rta.: $(4x)^3$
   (c) Rta.: $3(x+7)$
   (d) Rta.: $2x-1$
2.
   (a) Rta.: $P=(3\sqrt{2}+10)x$ y $A=\frac{13}{2}x^2$
   (b) Rta.: $P=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{33}{2}\right)x$ y $A=\frac{43}{4}x^2$
3.
   (a) Rta.: No
   (b) Rta.: Sí
   (c) Rta.: Sí
   (d) Rta.: No
4.
   (a) Rta.: $-3x^2-x$
   (b) Rta.: $4x^6-6x^5+5x^4-x^2+3x-1$
   (c) Rta.: $-8x^6+16x^5-20x^4+21x^3-10x^2+6x$
5.
   (a) Rta.: No; $P_1(x)=(x-1)^2+9$
   (b) Rta.: Sí; $P_1(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
   (c) Rta.: No; $P_1(x)=(x+2)^2-3$
   (d) Rta.: No; $P_1(x)=-2(x^3-1)^2-1$
   (e) Rta.: Sí; $P_1(x)=(x-2)^2$
   (f) Rta.: No; $P_1(x)=-4(x+3)^2+37$
6.
   (a) Rta.: $C(x)=-2x^3-2x^2+4x+14$; $R(x)=17x-60$
   (b) Rta.: $C(x)=x+\frac{2}{5}$; $R(x)=16$
   (c) Rta.: $C(x)=3x^3+4x^2+x$; $R(x)=0$
7.
   (a) Rta.: $C(x)=3x^3+2x^2+8x+12$; $R(x)=37$
   (b) Rta.: $C(x)=5x^3+10x^2+22x+41$; $R(x)=0$
   (c) Rta.: $C(x)=3x^2-\frac{27}{2}x+\frac{43}{4}$; $R(x)=-39$
   (d) Rta.: $C(x)=x^2+x+1$; $R(x)=2$
8. Rta.: $n=-1$

9. Rta.: $k = -7$

10. Rta.: $b = -3$ y $a = 4$

11.

(a) Rta.: $P(x) = (x + 2)(x + 3)(x - 4)$

(b) Rta.: $P(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 1)^2$

(c) Rta.: $P(x) = \frac{1}{2}(x - 3)(x - 2)(x - 1)$

12.

(a) Rta.: $P(x) = (x - 2)(x + 2)^2$

(b) Rta.: $P(x) = (x - 9)(x + 9)$

(c) Rta.: $P(x) = (x^2 - 2)(x^4 + 1)$

(d) Rta.: $P(x) = (x - 1)(x^4 - 5x^2 + 6)$

(e) Rta.: $P(x) = (x + 1)^2(x - 1)^2$

(f) Rta.: $P(x) = (2x^2 + 7)(6x - 7)$

13. Rta.: $P(x) = 5x^3 - 30x^2 + 55x - 30$

14. Rta.: $P(x) = x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 44x + 20$

15. Rta.: -22

16.

17.

(a) Rta.: $\frac{-x^6-2x^4-1}{x^4-1}$

(b) Rta.: $\frac{9x}{x^2+4x-21}$

(c) Rta.: $\frac{(x-3)(x^2-1)}{-x}$

(d) Rta.: $\frac{6x^3+3x^2+6x}{2x^2+4x+2}$

19. Rta.: $125\ N$

20. Rta.: $d_2 = \frac{200N \cdot 4m}{800N} = 1m$, $d_1 = 3m$

21. Rta.: $d_1 = \frac{50N \cdot 0{,}20m}{20N} = 0{,}5m$

22. Rta.: $0{,}75N$

23. Rta.: $F_y = P,\ \ F = 200N$

24. Rta.: $F = \frac{P}{2} = \frac{50kg \cdot 10m/s^2}{2} = 250N$

25. Rta.: $F = \frac{P}{2n} = 100N$

26. Rta.: $n = \frac{2000N}{200N} : 2 = 5$

27. Rta.: $F = \frac{P}{2^n} = \frac{1600N}{8} = 200\ N$

28. Rta.: $F = 33{,}3\ N$

29. Rta.: $F = 60\ N$

30. Rta.: $d = 2m$

Capítulo 2

1.

(a) Rta.: $a = \frac{3}{4}$

(a) Rta.: $a = \frac{9}{2}$

2.

(a) Rta.: Opción ii)

(b) Rta.: Opción iii)

3. Rta.: \$5.000, \$10.000 y \$30.000

4. Rta.: 10 años

5. Rta.: $26m$

6. Rta.: $7cm$

7. Rta.: $\begin{cases} si\ a = 6, \text{única solución} \\ si\ a > 6, \text{dos soluciones} \\ si\ a < 6, \text{ninguna solución} \end{cases}$

8.

(a) Rta.: $-x^2 + 2x + 3$

(b) Rta.: $2x^2 + x + \frac{1}{8}$.

9. Rta.: 21 años

10. Rta.: $32cm$

11.

(a) Rta.: $S = \{-4; 4; 6\}$

(b) Rta.: $S = \left\{-3; \frac{1}{3}\right\}$

(c) Rta.: $S = \{-10; -8; 0; 8\}$

(d) Rta.: $S = \{-1; 2\}$

(e) Rta.: $S = \{3; 9\}$

(f) Rta.: $S = \{0; 5\}$

(g) Rta.: $S = \left\{-\frac{11}{8}\right\}$

(h) Rta.: $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(i) Rta.: $S = \{-1\}$

(j) Rta.: $S = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$

12.

(a) Rta.: $log\left(\frac{x-3}{x^2+3x}\right)$

(b) Rta.: $log\left(\frac{x^2}{\sqrt{y^3}}\right)$

(c) Rta.: $log\sqrt{\frac{x^3}{2y}}$

13.

(a) Rta.: $S = \{3\}$
(b) Rta.: $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
(c) Rta.: $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$
(d) Rta.: $S = \{5\}$
(e) Rta.: $S = \left\{\frac{19}{5}\right\}$
(f) Rta.: $S = \{3\}$
(g) Rta.: $S = \left\{\frac{1}{2}; 4\right\}$
(h) Rta.: $S = \{2\}$

14. Rta.: $h = -5$; $k = 2$

15. Rta.: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$

16.

(a) Rta.: $C(0; -2); r = 4$
(b) Rta.: $C(1; -1); r = 3$
(c) Rta.: $C(-3; 4); r = 5$
(d) Rta.: $C\left(\frac{1}{2}; 0\right); r = \frac{1}{2}$
(e) Rta.: $C(1; -2); r = 3$

17.

(a) Rta.: $S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi\right\}$
(b) Rta.: $S = \left\{\frac{\pi}{6}; ; \frac{7}{6}\pi\right\}$
(c) Rta.: $S = \left\{\frac{3}{2}\pi\right\}$
(d) Rta.: $S = \left\{0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5}{3}\pi; 2\pi\right\}$
(e) Rta.: $S = \left\{0; \frac{\pi}{2}; \frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi; 2\pi\right\}$
(f) Rta.: $S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\}$
(g) Rta.: $S = \left\{0; \frac{5}{6}\pi; \pi; \frac{7}{6}\pi; 2\pi\right\}$

18.

(a) Rta.: $S = \{(2; 2)\}$
(b) Rta.: $S = \{(0; -3)\}$
(c) Rta.: $S = \left\{\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)\right\}$
(d) Rta.: $S = \emptyset$
(e) Rta.: $S = \{(3y; y)\}$
(f) Rta.: $S = \{(0; 0)\}$

19. Rta.: Galileo 20 años y Brisa 10 años.

20. Rta.: 40 hombres y 70 mujeres

21. Rta.: $900 y $1350

22. Rta.: $b = 8cm\ y\ h = 5cm$

23. Rta.: 6,06 s

24.

(a) Rta.: $5\frac{m}{s^2}$

(b) Rta.: $62{,}5m$

(c) Rta.: $55\frac{m}{s}$

25.

(a) Rta.: 2 h

(b) Rta.: Se encuentran a las 11 de la mañana.

(c) Rta.: El coche que partió de A hacia B recorrió 180 km mientras que el que partió de B hacia A recorrió 120 km.

26.

(a) Rta.: 9 h

(b) Rta.: $1080km$

27.

(a) Rta.: 2,5 s

(b) Rta.: $20m$

28. Rta.: 36 minutos si circulaban en el mismo sentido, 2,12 minutos si circulaban en sentidos opuestos.

29. Rta.: 500 m si circulaban en el mismo sentido, 1500 m si circulaban en sentidos opuestos.

30.

(a) Rta.: $1{,}25h$

(b) Rta.: $625km$

31.

(a) Rta.: $7{,}667h$

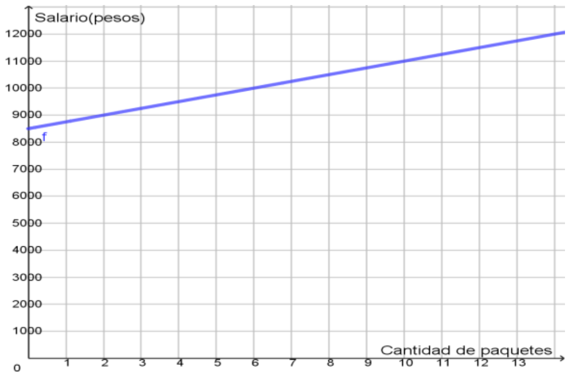
(b) Rta.: 383,333 km

Capítulo 3

1. Rta.:
   Gráfica 1: No es función.
   Gráfica 2: Es función. $Im(f) = [0; \infty)$
   Gráfica 3: No es función.
   Gráfica 4: Es función. $Im(f) = [0; \infty)$
2. Rta.:

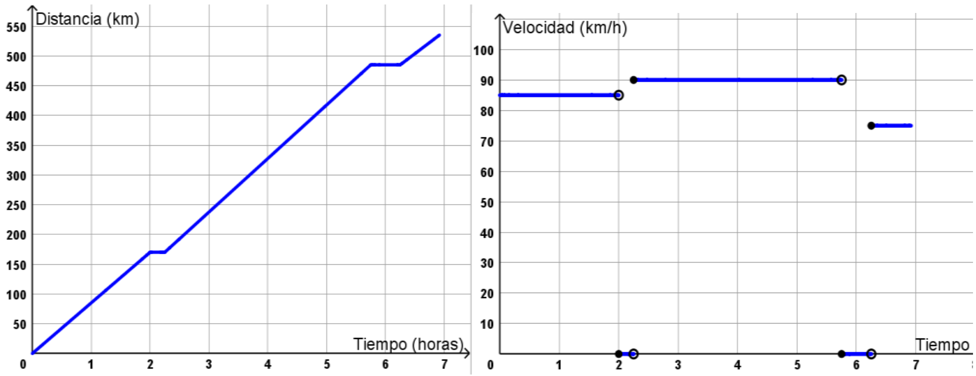
Cantidad de paquetes	Salario
0	8500
1	8750
2	9000
3	9250
4	9500
5	9750
$\boldsymbol{x}$	$8500 + 250x$

   (a) Rta.: $x \geq 0$
   (b) Rta.: $f(x) \geq 8500$
   (c)



3. Rta.:
   (a) *Tramo* $[0s; 60s] \rightarrow$ Tiene una velocidad constante de 40 m/s
   Tramo $[60s; 100s] \rightarrow$ Aumenta su velocidad de 40 m/s a 80 m/s
   Tramo $[100s; 140s] \rightarrow$ Tiene una velocidad constante de 80 m/s
   Tramo$[140s; 180s] \rightarrow$ Disminuye su velocidad de 80 m/s hasta el reposo.
   (b) *Tramo* $[0s; 60s] \rightarrow$ Aceleración: 0 m/s^2
   Tramo $[60s; 100s] \rightarrow$ Aceleración: 1 m/s^2
   Tramo $[100s; 140s] \rightarrow$ Aceleración: 0 m/s^2
   Tramo $[140s; 180s] \rightarrow$ Aceleración: -2 m/s^2

4.

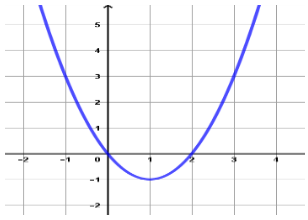


5. Rta.:
   (a) Es una función de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   (b) Es una función de $\mathbb{R} - \{-3; 3\} \to \mathbb{R}$
   (c) Es una función de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   (d) Es una función de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   (e) Es una función de $(-\infty; 3] \to \mathbb{R}$
6. Rta.:
   (a) $Dom\ (f) = (0; 2]$
   (b) $Dom(g) = (-2; 1) \cup (1; \infty)$
   (c) $Dom(h) = (-\infty; -1]$
7. Rta.:
   (a) $Dom(f) = \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$; $C^0 = \{5\}$
   (b) $Dom(g) = \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right)$; $C^0 = \{-4\}$
8. Rta.:
   (a) $Dom(f) = \mathbb{R}$; Ord. al origen: $y = 2$; $C^0 = \{-13\}$
   (b) $Dom(f) = (-\infty; 3]$; Ord. al origen: $y = \sqrt{3} - 5$; $C^0 = \{-22\}$
   (c) $Dom(f) = (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$; Ord. al origen: *No tiene* ; $C^0 = \emptyset$
   (d) $Dom(f) = \mathbb{R}$; Ordenada al origen: $y = 1$; $C^0 = \emptyset$
9. Rta.:
   (a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$; Ordenada al origen: $y = 1$; $C^0 = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
   (b) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3; 4\}$; Ordenada al origen: $y = \frac{1}{4}$; $C^0 = \{1\}$
   (c) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-5\}$; Ordenada al origen: $y = 1$; $C^0 = \emptyset$
   (d) $Dom(f) = \mathbb{R}$; Ordenada al origen: $y = \frac{5}{9}$; $C^0 = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
10. Rta.:
   (a) Ceros: $\{0; -2; -1\}$; Ordenada al origen: 0
   (b) Ceros: $\{-3\}$; Ordenada al origen: -3
   (c) Ceros: $\{-2\}$; Ordenada al origen: $\log_2 3 \cong 1{,}58$
   (d) Ceros: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; Ordenada al origen: $\frac{1}{e} - 1 \cong -0{,}63$

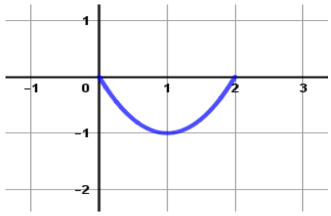
(e) Ceros: $\emptyset$; Ordenada al origen: 4

11. Rta.:

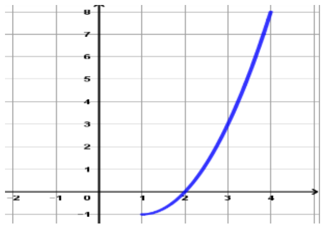
(a) *No es biyectiva*



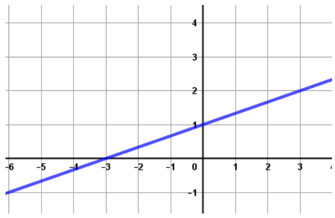
(b) *No es biyectiva*



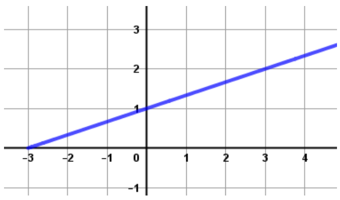
(c) *Es biyectiva*



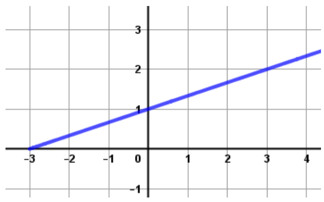
(d) *Es biyectiva*



(e) *No es biyectiva*



(f) *Es biyectiva*



12. Rta.:

(a) $f^{-1}: [-1;8] \to [1;4] / f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4x + x} + 1$

(b) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f^{-1}(x) = 3x - 3$

(c) $f: (0;3) \to (-3;6) / f^{-1}(x) = 3x - 3$

13. Rta.:

(a) $f \circ g = 2\sqrt{x} - 5$; $g \circ f = \sqrt{2x + 3} - 4$

(b) $f \circ g = -(3 - x)^2$; $g \circ f = (x + 1)^2$

(c) $f \circ g = (x + 3)^3$; $g \circ f = x^3 + 3$

14. Rta.:

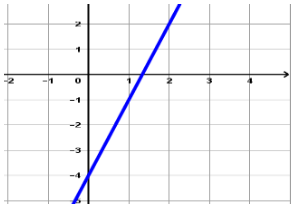
(a) $f(x) = 3\sqrt{x}$; $g(x) = 2x + 1$

(b) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - 1$; $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$

(c) $f(x) = \frac{3}{x} - 1$; $g(x) = x + 1$

15. Rta.:

(a)

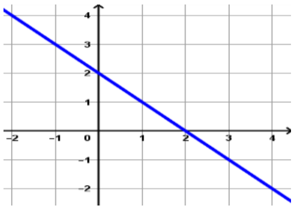


$Raíces: \left\{\frac{4}{3}\right\}$

$Ordenada\ al\ origen: -4$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

(b)

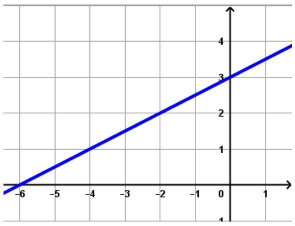


$Raíces: \{2\}$

$Ordenada\ al\ origen: 2$

$f^{-1}(x) = 2 - x$

(c)

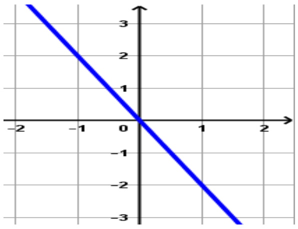


$Raíces: \{-6\}$

$Ordenada\ al\ origen: 3$

$f^{-1}(x) = 2x - 6$

(d)



$Raíces: \{0\}$

$Ordenada\ al\ origen: 0$

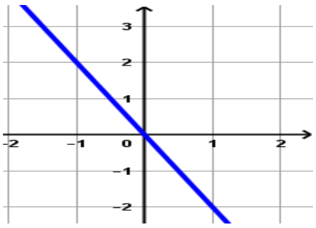
$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x$

16. Rta.:

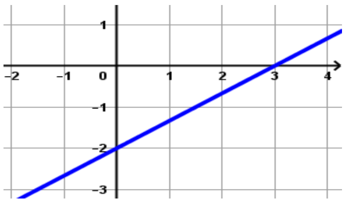
(a) Gráfica 1
(b) Gráfica 6
(c) Gráfica 2
(d) Gráfica 5
(e) Gráfica 3
(f) Gráfica 4

17. Rta.:

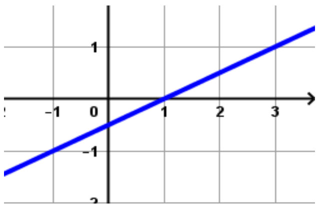
(a) $f(x) = -2x$ *Raíces:* $\{\mathbf{0}\}$



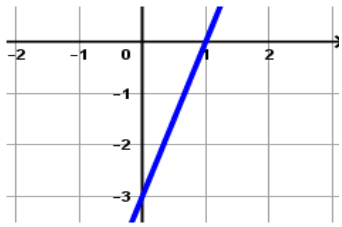
(b) $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$ *Raíces:* $\{\mathbf{3}\}$



(c) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ *Raíces:* $\{\mathbf{1}\}$



(d) $f(x) = 3x - 3$ *Raíces:* $\{\mathbf{1}\}$



18. Rta.: $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

19. Rta.: $f(x) = 3$

20. Rta.:

(a) Vértice: $(-3;4)$
Raíces: $\{-7;1\}$
$Im(f) = (-\infty;4]$
Ordenada al origen: $\frac{7}{4}$

(b) Vértice: $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$
Raíces: $\emptyset$
$Im(f) = \left[\frac{3}{4};\infty\right)$
Ordenada al origen: 1

(c) Vértice: $(0;8)$
Raíces: $\{-2;2\}$
$Im(f) = (-\infty;8]$
Ordenada al origen: 8

(d) Vértice: $(-1;-3)$
Raíces: $\{-2;0\}$
$Im(f) = [-3;\infty)$
Ordenada al origen: 0

(e) Vértice: $\left(-\frac{1}{2};-\frac{27}{4}\right)$
Raíces: $\emptyset$
$Im(f) = \left(-\infty;-\frac{27}{4}\right]$
Ordenada al origen: -6

(f) Vértice: $\left(-\frac{3}{2};-\frac{81}{8}\right)$
Raíces: $\{-6;3\}$
$Im(f) = \left[-\frac{81}{8};\infty\right)$
Ordenada al origen: -9

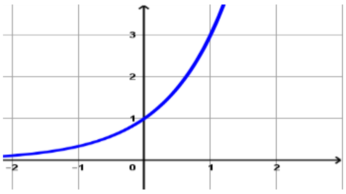
21. Rta.:

(a) $k = -\frac{1}{2}$ (b) $k = -\frac{1}{12}$ (c) $k = -\frac{1}{3}$

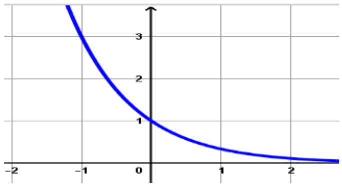
22. Rta.: La opción (d)

23. Rta.: Tienen que pasar 7 días para que todos se enteren del rumor.

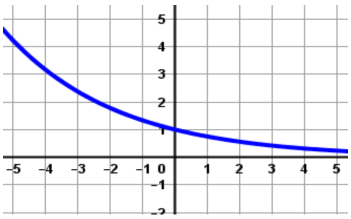
24. Rta.:

(a)


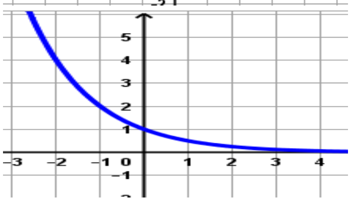
$Im(f) = (0;\infty)$
$Ord.\,al\,origen: y = 1$

(b)


$Im(f) = (0;\infty)$
$Ord.\,al\,origen: y = 1$

(c)


$Im(f) = (0;\infty)$
$Ord.\,al\,origen:$

(d)


$Im(f) = (0;\infty)$
$Ord.\,al\,origen: y = 1$

25. Rta.: $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

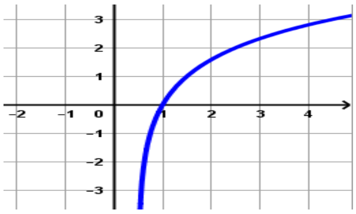
26. Rta.:

(a) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = (0; \infty)$; $f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{3}{2}x\right) + 1$

(b) $Dom(f) = (-4; \infty)$; $Im(f) = \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$

27. Rta.:

(a)



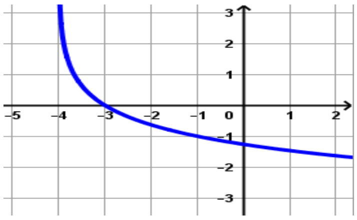
$Dom(f) = \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

$Im(f) = \mathbb{R}$

$C^0 = \{1\}$

$Ord.\, al\ origen: \emptyset$

(b)



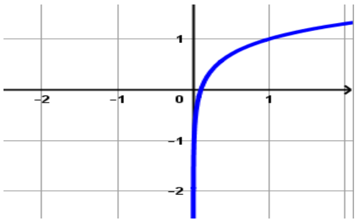
$Dom(f) = (-4; \infty)$

$Im(f) = \mathbb{R}$

$C^0 = \{-3\}$

$Ord.\, al\ origen: y = -2\log_3 2$

(c)



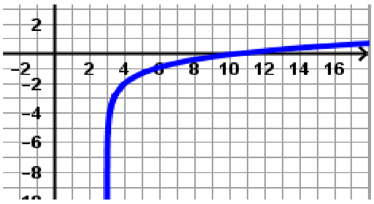
$Dom(f) = (0; \infty)$

$Im(f) = \mathbb{R}$

$C^0 = \left\{\frac{1}{10}\right\}$

Ord. al origen: No tiene

(d)



$Dom(f) = (3; \infty)$

$Im(f) = \mathbb{R}$

$C^0 = \{e^2 + 3\}$

Ord. al origen: No tiene

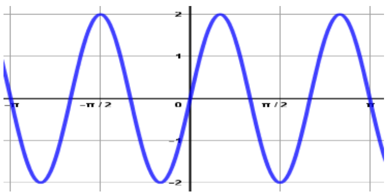
28. Rta.:

(a) *No existen a y b que cumplan con las condiciones pedidas.*

(b) $a = 2\ y\ b = \frac{1}{3}$

29. Rta.:

(a)

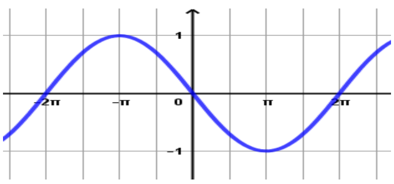


$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [-2; 2]$

$C^0 = \left\{\frac{1}{3}k\pi\right\}\ con\ k \in \mathbb{Z}$

(b)

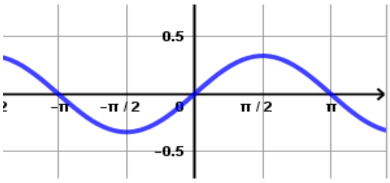


$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [-1; 1]$

$C^0 = \{2k\pi\}\ con\ k \in \mathbb{Z}$

(c)

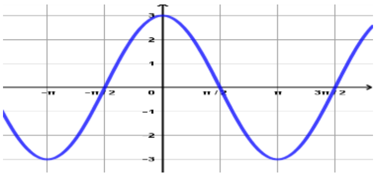


$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

$C^0 = \{k\pi\}\ con\ k \in \mathbb{Z}$

(d)

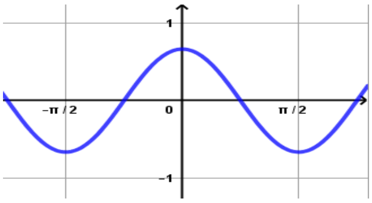


$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [-3; 3]$

$C^0 = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}\ con\ k \in \mathbb{Z}$

(e)

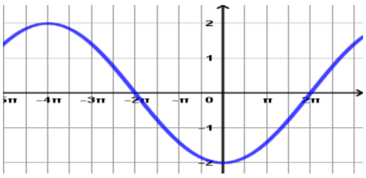


$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$

$C^0 = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\}\ con\ k \in \mathbb{Z}$

(f)

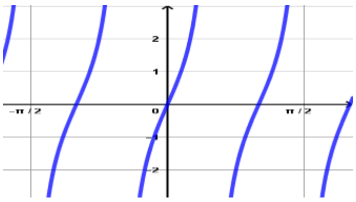


$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [-2; 2]$

$C^0 = \{2\pi + 4k\pi\}\ con\ k \in \mathbb{Z}$

(g)

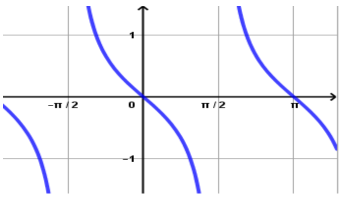


$Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right\}\ con\ k \in \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

$C^0 = \left\{k\frac{\pi}{3}\right\}\ con\ k \in \mathbb{Z}$

(h)



$Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}\ con\ k \in \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

$C^0 = \{k\pi\}\ con\ k \in \mathbb{Z}$

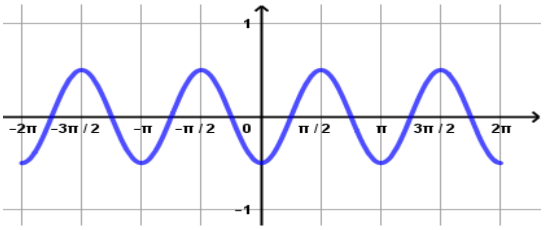
30. Rta.:

$Im(f) = [-3; 3]$

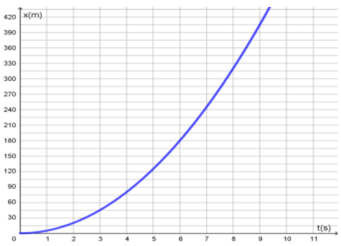
$C^0 = \{-\pi; 0; \pi\}$

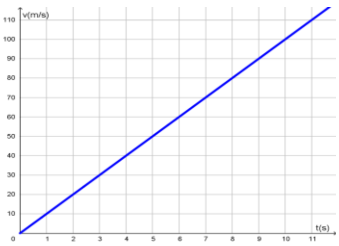
31. Rta.:

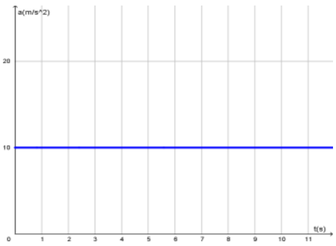
$Im(f) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; $C^0 = \left\{-\frac{7}{4}\pi; -\frac{5}{4}\pi; -\frac{3}{4}\pi; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi\right\}$



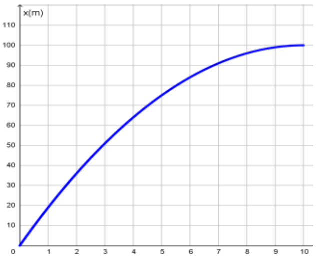
32. Rta.:
    (a) *9m*
    (b) *Alcanza una altura máxima de 12m a los 3s*
    (c) *9s*
33. Rta.:
    (a) $x(3s) = 45m.$
    (b) $v(100m) = 44{,}7\,\frac{m}{s}.$
    (c) *2,5 s.*
    (d) *7,75 s.*
    (e)

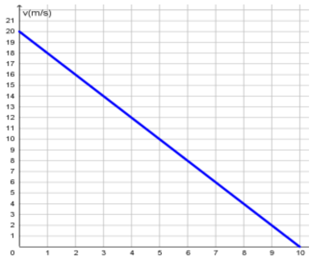




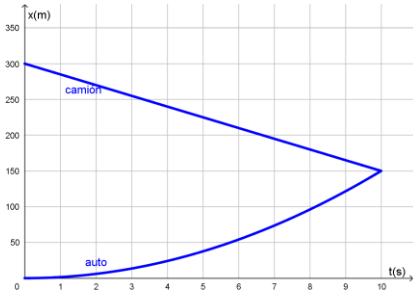


34. Rta.: $x(t) = -2\,t^2 + 80, v(t) = -4t$
35. Rta.:
    (a) $-2\,\frac{m}{s^2}.$
    (b) *10 s.*
    (c)

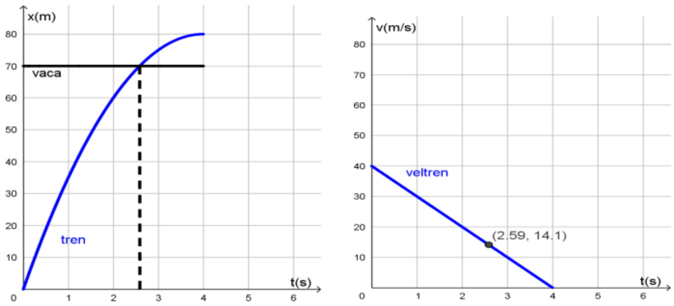




36. Rta.:
    (a) *600m*
    (b) *30 s*
37. Rta.: $x(t) = v_0 t + \frac{t.at}{2} = v_0 t + \frac{1}{2} a\, t^2$
38. Rta.: Se encuentran a los $150m$ y tardaron $10s$ en hacerlo.



39. Rta.: El tren recorre los *70m* en *2,59s* y para ese tiempo la velocidad es de *14,1m/s*, por lo tanto choca a la vaca por no tener velocidad cero.



40. Rta.:
   (a) *600m*
   (b) *30 s*

Soraya BUCCINO nació en la Provincia de Buenos Aires donde vive actualmente. Es Profesora de Matemática y obtuvo su Licenciatura en Enseñanza de la Matemática en 2011 en la UTN FRGP. Es docente en diversas materias del área de Matemática: Álgebra y Geometría Analítica, Estructuras algebraicas y sus aplicaciones, Probabilidad y Estadística I y II en la UNM y la UTN. Ha participado en congresos y proyectos de investigación relacionados con la Enseñanza de la Matemática, a través de software de Geometría dinámica. Actualmente trabaja como coordinadora técnica del programa NEXOS de la UTN FRGP. Es autora del libro "Elementos de Probabilidad y Estadística", editorial UNM.

Silvana RAMIREZ DANERI nació en CABA y vive actualmente en General Pacheco, hogar de la UTN FRGP, donde obtuvo su título de Ingeniera Mecánica en 2015. Es docente en diversas materias del área de Ciencias Básicas: Álgebra y Geometría Analítica, Análisis Matemático y Física en UTN y UBA. Ha participado en congresos y proyectos de investigación relacionados con la Enseñanza de la Matemática y la Ciencia y Tecnología de los Materiales. Participa del programa NEXOS de la UTN FRGP. Cursó estudios de posgrado en la Maestría en Ciencia y Tecnología de Los Materiales en el Instituto Sábato (CNEA – UNSAM) y en Maestría en Docencia Universitaria en UTN FRGP.

Mario DI BLASI REGNER realizó estudios de grado y posgrado en el INSPT y en la UNSAM dónde obtuvo el título de Especialista en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y Matemática. Actualmente se encuentra finalizando su Doctorado en Enseñanza de las Ciencias (mención Matemática) en la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN. Es director del Departamento de Materias Básicas y de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática en la UTN FRGP. Dirige proyectos de investigación relacionados con la Enseñanza de la Matemática y es el coordinador académico del Proyecto NEXOS en la FRGP. Ha participado en encuentros científicos internacionales como expositor y publicado sus trabajos en revistas especializadas a nivel nacional e internacional.

Celia FASCE nació en CABA donde vive actualmente. Es Profesora de Matemática y obtuvo su Licenciatura en Enseñanza de las Ciencias, con orientación en Didáctica de la Matemática en 2012 en UNSAM. Es profesora en UBA, UTN, INSPT-UTN y el ISPJVG en diversas materias: Álgebra y Geometría Analítica, Análisis Matemático I y II, Complementos de Trigonometría y Geometría Analítica, Matemática Aplicada y varios Seminarios. Ha participado en proyectos de investigación relacionados con la Enseñanza de la Matemática a través de software de Geometría dinámica. Es autora del libro "Introducción al Cálculo con Aplicaciones Económicas" y de diversos cursos de capacitación docente.

Pablo VIVEROS LINCOMAN nació en la CABA y vive actualmente en la provincia de Buenos Aires. Es Profesor de Matemática y obtuvo su Licenciatura en Enseñanza de la Matemática en 2013 en la UTN FRGP. Es docente universitario en diversas materias del área de Matemática: Álgebra y Geometría Analítica, Probabilidad y Estadística I y II en la UTN. A nivel de la educación terciaria, es profesor en asignaturas que relacionan la Matemática con áreas de la Física y la Química. Ha participado en congresos internacionales y proyectos de investigación vinculados con la Enseñanza de la Matemática, a través de software de Geometría dinámica.

Esta obra es el resultado del trabajo realizado por docentes de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco y reúne los conocimientos básicos, en el área de Matemática, considerados imprescindibles para el acceso a la Universidad.

Al escribir cada capítulo se ha procurado utilizar un "lenguaje natural" e introducir a los alumnos gradualmente en el lenguaje propio de la Matemática, llevándolos a la formalización que esta materia exige en su aspecto conceptual.

Considerando que la aplicación de la Matemática, puede aportar grandes beneficios en su enseñanza y aprendizaje, se tratan los conceptos matemáticos integrados y aplicados a la Física y al entorno cotidiano de los alumnos.

ISBN 978-987-86-2574-4

9 789878 625744