MATEMÁTICA PREUNIVERSITARIA

CON APLICACIONES FÍSICAS

Tomo 1

BUCCINO - DANERI - DI BLASI - FASCE - VIVEROS

Matemática Preuniversitaria

con Aplicaciones Físicas

Matemática Preuniversitaria

con Aplicaciones Físicas

Claudia Soraya Buccino

María Silvana Daneri

Celia Beatriz Fasce

Mario Di Blasi Regner

Pablo César Viveros

Matemática preuniversitaria : con aplicaciones físicas / Claudia Soraya Buccino
... [et al.]. - 1a ed. - Hurlingham : Claudia Soraya Buccino, 2018.
160 p. ; 30 x 21 cm.

ISBN 978-987-42-8904-9

1. Matemática. 2. Números Reales. 3. Geometría Plana. I. Buccino, Claudia Soraya
CDD 512.786

Departamento de Ciencias Básicas

Director: Mario DI BLASI REGNER

Proyecto NEXOS – Área de Articulación

Director: Ricardo H. CRIVICICH

Coordinador general: Mario DI BLASI REGNER

Coordinadores técnicos: C. Soraya BUCCINO / Maximiliano BARZÁN

1ª edición: agosto de 2018

Claudia Soraya Buccino, 2018

ISBN: 978-987-42-8904-9

Se imprimió en agosto de 2018 en Zona Pacheco (Av. Constituyentes 770, Pacheco, Buenos Aires)

Prólogo

A partir del trabajo realizado con docentes y alumnos de los últimos años de diversas escuelas secundarias, que articulan con nuestra facultad y por ser profesores en los primeros años de la Universidad es que, conocemos y comprendemos la problemática de los estudiantes que se inician en la vida universitaria.

Esta obra es el resultado del trabajo realizado por docentes del Área de articulación de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco y reúne los conocimientos básicos, en el área de Matemática, que consideramos imprescindibles para el acceso a la Universidad.

Al escribir cada capítulo hemos procurado utilizar un "lenguaje natural" e introducir a los alumnos gradualmente en el lenguaje propio de la Matemática, pero también, con la rigurosidad y formalización que esta materia exige en su aspecto conceptual. Considerando, además, que los alumnos están inmersos en el mundo de la tecnología y la comunicación, donde priman las imágenes para la comprensión de muchos conceptos, hemos reforzado en todos los temas abordados, donde fuera posible, el uso de este recurso.

En ningún momento intentamos ahorrar en explicaciones ni en el desarrollo de los conceptos, ya que priorizamos la comprensión en profundidad de los conceptos aquí desarrollados y esperamos que eso suceda.

Realizamos este libro con la convicción de que la aplicación de la Matemática, bien orientada, puede aportar grandes beneficios en su enseñanza y aprendizaje. En este sentido, tratamos los conceptos matemáticos integrados y aplicados a la Física y al entorno cotidiano de los alumnos.

Es nuestro deseo, que este texto se convierta en una herramienta útil para nuestros alumnos y que, sumados a sus esfuerzos, haga posible un exitoso ingreso a la Universidad.

Los autores.

Índice

1. Números y aplicaciones

1.1. Subconjuntos de ℝ 1
1.1.1. Números naturales (ℕ) 1
1.1.2. Números enteros (ℤ) 2
1.1.3. Números racionales (ℚ) 2
1.1.4. Números irracionales 5
1.2. La recta numérica 7
1.3. Valor absoluto de un número real 8
1.4. Intervalos Reales 11
1.5. Operaciones en ℝ 15
1.5.1. Operaciones elementales 15
1.5.2. Propiedades de la adición y la multiplicación 16
1.5.4. Potenciación 19
1.5.6. Radicación 21
1.5.7. Potenciación con exponentes racionales 22
1.6. Notación científica 23
1.7. SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino) 26
1.7.1. Múltiplos y submúltiplos de las unidades 27
1.9. Aplicaciones físicas: el proceso de medición 29
1.9.2. Incertidumbre de una medición física 30
1.9.3. Valor representativo e incertidumbre experimental 31
1.9.4. Incertidumbre relativa 32
1.9.5. Medición directa con instrumento digital 33
1.9.6. Medición directa con instrumento analógico longitudinal 33
1.9.7. Mediciones indirectas 34
1.10. Actividades del capítulo 37

2. Geometría y aplicaciones

2.1. Puntos y rectas 47
2.2. Ángulos entre rectas 49
2.2.1. Posiciones relativas entre ángulos 50
2.3. Lugares geométricos elementales 53
2.3.1. Mediatriz de un segmento 53
2.3.2. Bisectriz de un ángulo 54
2.4. Triángulos 56
2.4.1. Triángulos congruentes 56
2.4.2. Altura de un triángulo 58
2.4.3. Teorema de Pitágoras 59
2.5. Semejanza y proporcionalidad 62
2.6. Circunferencia 65
2.6.1. Elementos de la circunferencia 66
2.6.2. Ángulos que podemos distinguir en una circunferencia 69
2.7. Área y Perímetro 70
2.7.1. Fórmulas para el cálculo de área y perímetro 70
2.8. Vectores en R2 73
2.8.1. Resultante de un sistema 75
2.8.2. Vectores en un sistema de ejes coordenados 77
2.8.3. Características de los vectores 78
2.8.4. Suma de vectores en sistema de coordenadas 79
2.8.5. Producto entre un número real y un vector 79
2.8.6. Forma polar de un vector 83
2.8.7. Forma canónica de un vector 85
2.9. Aplicaciones físicas: propagación de incertidumbres 87
2.9.1. Propagación de incertidumbres en la suma 88
2.9.2. Propagación de incertidumbres en la resta 90
2.9.3. Propagación de incertidumbres en la multiplicación 91
2.9.4. Propagación de incertidumbres en la potenciación 93
2.9.5. Propagación de incertidumbres en la división 94
2.10. Actividades del capítulo 97

3. Trigonometría y aplicaciones

3.1. Sistema sexagesimal y radial 105
3.1.1. Sistema sexagesimal 105
3.1.2. Sistema radial 106
3.2. Razones trigonométricas 107
3.2.1. Razones trigonométricas para ángulos particulares 112
3.3. Teorema del seno y el coseno 119
3.3.1. Teorema del seno 119
3.3.2. Teorema del coseno 123
3.4. Identidades trigonométricas 127
3.4.1. Identidad de la razón 127
3.4.2. Identidad pitagórica 127
3.4.3. Identidades de la suma o diferencia de dos ángulos 128
3.4.4. Identidades del ángulo doble 128
3.4.5. Identidades de la mitad de un ángulo 129
3.5. Aplicaciones físicas: la Estática 131
3.5.1. Diagrama de cuerpo libre 131
3.5.2. Plano inclinado 139
3.5.3. Momento de una fuerza o torque 144
3.6. Actividades del capítulo 147

1. Números y aplicaciones

1.1. Subconjuntos de $\mathbb{R}$

El conjunto de los números reales está formado por subconjuntos, cada uno de ellos con características propias e importantes que analizaremos en esta primera sección.

1.1.1. Números naturales ($\mathbb{N}$)

Los números naturales $1,2,3,4,\cdots$, son aquellos que nos permiten determinar, por ejemplo, "cuántos" alumnos hay en el aula o "cuántos" libros hay en la biblioteca.
Podemos entonces decir que los **números naturales** son el instrumento adecuado para contar elementos de una colección o conjunto y con esa finalidad fueron creados.
El conjunto de todos los números naturales que simbolizaremos con $\mathbb{N}$, cumple las siguientes propiedades:

1. El primer elemento del conjunto $\mathbb{N}$ es el 1.
2. Todo número que pertenece al conjunto $\mathbb{N}$ y lo simbolizaremos n, tiene un sucesor (llamado consecutivo) que también pertenece al conjunto $\mathbb{N}$ y se escribe $n+1$.

Por ejemplo, el siguiente de 2 es $2+1=3$ y el siguiente de 25 es $25+1=26$.

> ¿Cómo se puede escribir el anterior de $\boldsymbol{n}$? ¿y el doble de $\boldsymbol{n}$? ¿y los números pares? ¿El conjunto $\mathbb{N}$ tiene último elemento?

1.1.2. Números enteros ($\mathbb{Z}$)

Los números enteros, además de completar y extender el conjunto de los números naturales, surgieron ante la imposibilidad de realizar restas con resultado dentro del conjunto de los naturales. Por ejemplo, $5 - 8 = -3$, que no es un número natural.

Este nuevo conjunto, que amplía al de los naturales, se obtiene de la unión de los siguientes conjuntos:

- Números naturales: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$
- El cero: 0
- Inverso aditivo de cada número natural: $-1, -2, -3, -4, -5, -6, \cdots$

y podemos simplificar lo anterior, a través de la siguiente notación:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$$

que se lee: "el conjunto $\mathbb{Z}$ está formado por la unión de, el conjunto de los naturales, el conjunto formado por el cero y el conjunto de los enteros negativos".

1.1.3. Números racionales ($\mathbb{Q}$)

Como es de esperar, los números enteros también son insuficientes para resolver otro tipo de problemas importantes como es el de "medir" cantidades tales como longitud, superficie, volumen, etc. Así surgen los números racionales, conjunto que nos permitirá además resolver cocientes que en el conjunto de los números enteros no tendrían solución. Analicemos a continuación un ejemplo.

Supongamos que, para preparar una pintura en un tono de color, previamente elegido, el fabricante dice que hay que mezclar 10 litros de pintura blanca con 3 litros de pintura verde. Si queremos hacer una mezcla que tenga la misma tonalidad, pero usando una lata de 4 litros de pintura verde, ¿cuántos litros de pintura blanca debemos usar en este caso?

Dado que la pregunta es sobre los litros de pintura blanca, busquemos la cantidad de litros de pintura blanca por cada litro de verde.

Sabemos que la proporción entre los colores es 10 litros de blanco por cada 3 litros de verde, que podemos escribir 10:3 o también $\frac{10}{3}$. Si duplicamos o triplicamos las respectivas cantidades de colores, obtenemos distintas cantidades de mezcla que conservan la tonalidad elegida. Por ejemplo,

$$10:3 \qquad 20:6 \qquad 30:9 \qquad 40:12$$

$$\frac{10}{3} \qquad \frac{20}{6} \qquad \frac{30}{9} \qquad \frac{40}{12}$$

Si resolvemos el cociente de las expresiones que tenemos arriba vemos que siempre es el mismo,

$$\frac{10}{3} = \frac{20}{6} = \frac{30}{9} = \frac{40}{12} = 3{,}333333 \cdots$$

¿Qué representa el número obtenido? Es la expresión decimal de todas las fracciones equivalentes e indica la cantidad de litros de pintura blanca por cada litro de verde.

Si lo multiplicamos por 100 con una aproximación de dos decimales obtenemos una relación *porcentual* de la cantidad de pintura blanca, respecto de la cantidad de pintura verde,

$$100 \times 3{,}333333 \cdots \cong 333{,}33\%$$

El porcentaje es otra manera de expresar un número racional, donde «por ciento» significa «por cada cien unidades». En nuestro problema, por cada 100 unidades de pintura verde habrá aproximadamente 333,33 unidades de pintura blanca, es decir, un poco más del triple.

Ahora, si en lugar de multiplicar por cien, lo multiplicamos por 4 obtenemos la cantidad de pintura blanca necesaria para 4 litros de pintura verde,

$$4 \times 3{,}333333 \cdots = 13{,}333333 \cdots$$

Podemos notar que un número racional tiene infinitas expresiones fraccionarias (todas equivalentes entre sí) y su expresión decimal, puede tener como en este caso infinitas cifras decimales periódicas, lo que imposibilita su escritura exacta.

Si respondiéramos que se necesitan 13,3 litros de pintura blanca esto sería sólo una aproximación al resultado exacto. Toda aproximación conlleva un error, que puede calcularse haciendo la diferencia entre el valor exacto y la aproximación propuesta. Veamos algunos ejemplos en la siguiente tabla,

Aproximación	**Error de la aproximación**
$13{,}3$	$0{,}033333 \cdots$
$13{,}33$	$0{,}003333 \cdots$
$13{,}333$	$0{,}000333 \cdots$
$13{,}3333$	$0{,}000033 \cdots$

Cuantos más decimales utilizamos en nuestra respuesta, menor es el error y entonces, mejora la aproximación. Todas las aproximaciones que tomamos son menores al valor exacto, por eso se llaman «aproximaciones por defecto». En caso de querer dar la respuesta exacta podemos hacerlo a través de la expresión fraccionaria,

$$4 \times \frac{10}{3} = \frac{40}{3} = 13 + \frac{1}{3} = \boxed{\mathbf{13\frac{1}{3}}} \text{ litros de pintura blanca}$$

Para sintetizar lo expuesto, un número racional cualquiera puede ser expresado de tres formas diferentes,

$$\frac{10}{3} = 3{,}33333\cdots = 333{,}333\cdots\%$$

Los números racionales reciben este nombre ya que se obtienen a partir del **cociente o razón entre dos números enteros**. Este cociente puede ser:

- Entero,

$$\frac{32}{4} = 8$$

- Decimal finito,

$$\frac{1}{8} = 0{,}125$$

- Decimal periódico puro (toda la parte decimal se repite indefinidamente),

$$\frac{34}{3} = 11{,}3333333333333333\cdots = 11{,}\widehat{3}$$

- Decimal periódico mixto (solo una parte de la parte decimal, se repite indefinidamente),

$$\frac{7}{12} = 0{,}58333333333333333\cdots = 0{,}58\widehat{3}$$

Todos los números ejemplificados arriba, por diferentes que parezcan, fueron expresados como una razón o cociente entre dos números enteros. Esta particularidad hace que todos ellos sean racionales. Podemos definir simbólicamente,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ / \ p \in \mathbb{Z} \ , q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Que se lee: el conjunto $\mathbb{Q}$ está formado por todos los números que podemos escribir como una razón entre dos números enteros. Siendo el denominador distinto de cero (tenemos que hacer esta aclaración ya que no es posible dividir por cero).

Ejemplo 1: *Expresar en forma fraccionaria y decimal los números 0,5 ; 0,65 y 0,005.*

Expresión decimal	**Expresión fraccionaría**	**Expresión porcentual**
0,5	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	$\frac{50}{100} = 50\%$
0,65	$\frac{65}{100} = \frac{13}{20}$	$\frac{65}{100} = 65\%$
0,005	$\frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$	$\frac{5}{1000} = 0{,}5\%$

¿Los números naturales son racionales?
¿y los enteros? ¿Por qué?

1.1.4. Números irracionales

No todos los números pueden ser expresados como una fracción, es decir, los números no se agotan con los racionales. Por eso consideremos el siguiente ejemplo,

$$1{,}1001000100001000001000001 \cdots$$

¿es un número racional? Por un lado, vemos que la parte decimal no es finita. Analicemos si es periódica: si a partir de un determinado momento logramos encontrar las cifras decimales que se repiten, entonces sabremos que se trata de un número racional. Pero observando, vemos que entre dos "unos" consecutivos siempre el número de "ceros" es mayor, ¿cuál es el período de este número entonces? ... ¡no tiene!
Los números racionales surgieron ante la necesidad de "medir", pero veremos que son insuficientes para resolver un problema sencillo como el que analizaremos a continuación.

Supongamos que tenemos una mesa cuadrada que tiene 1 metro de lado y necesitamos medir la diagonal de esta. Como la diagonal de un cuadrado divide a este en dos triángulos rectángulos (Figura 1),

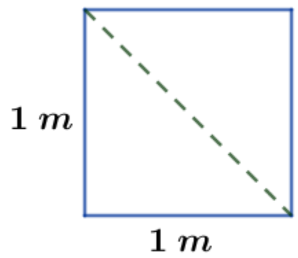


Figura 1

Aplicando Pitágoras resulta $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ metros. Cuando intentamos hallar la $\sqrt{2}$ vemos que no es para nada simple. Por ejemplo $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ y $(1{,}5)^2 = 2{,}25$. En el primer caso tenemos una «aproximación por defecto» ya que es menor al valor buscado y en el segundo caso tenemos una «aproximación por exceso» ya que es mayor al valor buscado. Es decir,

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

Veamos en el siguiente cuadro mejores aproximaciones y sus respectivos errores,

Por defecto	Error de la aproximación	**Por exceso**	Error de la aproximación
$1{,}4$	$0.014213562\cdots$	$1{,}5$	$0.085786437\cdots$
$1{,}41$	$0.004213562\cdots$	$1{,}42$	$0.005786437\cdots$
$1{,}414$	$0.000213562\cdots$	$1{,}415$	$0.000786437\cdots$
$1{,}4142$	$0.000013562\cdots$	$1{,}4143$	$0.000086437\cdots$
$1{,}41421$	$0.000003562\cdots$	$1{,}41422$	$0.000006437\cdots$

Si repetimos este proceso indefinidamente podemos conseguir valores cada vez más próximos a $\sqrt{2}$. Incluso si utilizamos la calculadora obtenemos que $\sqrt{2} = 1{,}414213562373095$ pero este valor sigue siendo una aproximación, limitada por la potencia de cálculo de esta.
Notemos que se trata de otro número cuya representación decimal no es exacta y tampoco periódica. Esto hace imposible escribir $\sqrt{2}$ como un cociente o razón, es decir, no es un número racional.
Todo número que no podemos expresar como un cociente entre dos números enteros, por tener infinitas cifras decimales no periódicas, es un **número irracional.** Entre ellos encontramos a $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e,$ etc.

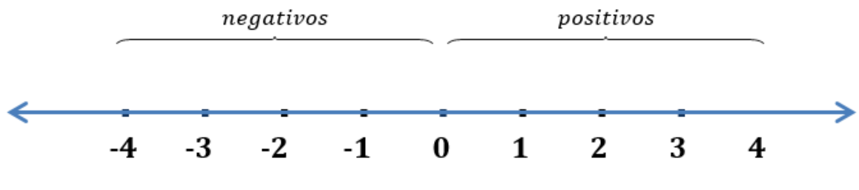
Ahora sí hemos completado el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) que podemos resumir con el siguiente esquema:

$$\mathbb{R}:\ \boldsymbol{Reales} \begin{cases} \mathbb{Q}:\ Racionales \begin{cases} \mathbb{Z}:\ Enteros \begin{cases} \mathbb{N}:\ Naturales \\ 0:\ Cero \\ \mathbb{Z}^{-}:\ enteros\ negativos \end{cases} \\ Fraccionarios \\ Decimales \end{cases} \\ \\ Irracionales \end{cases}$$

Para indicar que un número cualquiera a es un número real escribiremos, de aquí en adelante, para simplificar la escritura, $a \in \mathbb{R}$ que se lee: "a pertenece al conjunto $\mathbb{R}$".

1.2. La recta numérica

La representación geométrica de todos los números reales es una recta llamada recta numérica o recta real ($\mathbb{R}$). Debido a que hay una correspondencia entre cada número real y los puntos de la recta, se dice que es *biunívoca*, a cada número real le corresponde un punto y sólo uno de la misma y viceversa.



Seguro recordamos que a la derecha del cero se encuentran los números reales positivos ($\mathbb{R}^{+}$) y a la izquierda los reales negativos ($\mathbb{R}^{-}$). Esto se debe a que, en el conjunto de los números reales, entonces también en la recta real, es posible establecer una relación de orden. Podemos definir entonces a los números positivos como el conjunto de todos los números reales mayores que cero y a los negativos, como el conjunto de todos los números reales menores que cero. Simbólicamente, esto se puede escribir:

$$\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R}/a > 0\} \quad y \quad \mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R}/a < 0\}$$

Que se lee (la primera expresión): "el conjunto de los reales positivos está formado por todos los números que pertenecen al conjunto de los reales, tales que, resulten mayores que cero".

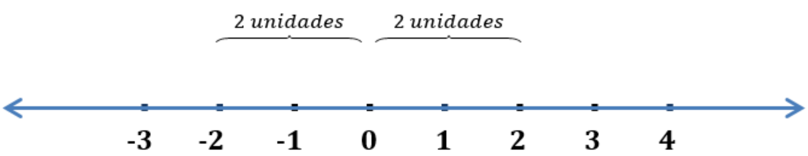
¿Cuál es el primer punto de la recta? ¿Y el último? ¿Cuántos puntos hay entre dos puntos A y B cualesquiera?

Propiedades de orden en el conjunto $\mathbb{R}$

1. *Todos los puntos de la recta están ordenados según dos órdenes naturales.*
2. *No existe primer ni último elemento.*
3. *Entre dos puntos cualesquiera existen infinitos puntos más.*

1.3. Valor absoluto de un número real

Otro concepto importante es el de **valor absoluto** de un número real, que se define como la distancia de dicho número al 0. Por ejemplo, el número 2 está a 2 unidades del cero, pero el número -2 también está a dos unidades del cero:



Cuando queremos hallar el valor absoluto de un número real a escribimos $|a|$. Para nuestro ejemplo,

$$|2| = 2 \quad y \quad |-2| = 2$$

Como el valor absoluto representa una distancia, siempre da como resultado un número positivo o cero.
Además, si al número al que le queremos calcular el valor absoluto es positivo o cero, el resultado siempre nos da el mismo número y si es negativo, nos da su opuesto.
En general, si el número a es positivo su valor absoluto es a y si el número a es negativo su valor absoluto es su opuesto.

Definamos ahora el valor absoluto de un número real a, simbólicamente:

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

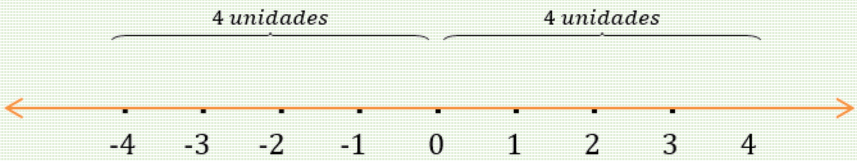
1. $|a| \geq 0$ *El valor absoluto de un número real a es siempre 0 o positivo*
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ *con* $b \neq 0$
4. $|-a| = |a|$ *Todo número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto*

¿Es siempre válida la igualdad $|a+b| = |a| + |b|$?
¿Si $|a| = |b|$ es siempre $a = b$?

Ejemplo 2: *Encontrar el valor de todos los x pertenecientes al conjunto de los números reales tales que:*

$$|2x+1| = 4$$

Los valores reales que están a cuatro unidades del cero son el 4 pero también el -4.



Si aplicamos la definición de valor absoluto,

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & si\ \ 2x+1 \geq 0 \\ -(2x+1) & si\ \ 2x+1 < 0 \end{cases}$$

entonces $2x+1 = 4$ o bien $2x+1 = -4$, resolvamos las dos ecuaciones.

$$2x = 3 \qquad\qquad 2x+1 = -4$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}} \qquad\qquad \boxed{\boldsymbol{x = -\frac{5}{2}}}$$

Observación: Es importante verificar las dos soluciones encontradas.

$$|2x+1| = 4 \qquad\qquad |2x+1| = 4$$

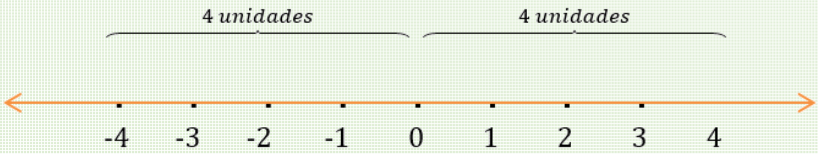
$$\left|2 \cdot \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} + 1\right| = 4 \qquad\qquad \left|2 \cdot \left(-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right) + 1\right| = 4$$

$$|3+1| = 4 \qquad\qquad |-5+1| = 4$$

Ejemplo 3: *Encontrar el valor de todos los x pertenecientes al conjunto de los números reales tales que:*

$$|x^2| = 4$$

Nuevamente los valores reales que están a cuatro unidades del cero son el 4 pero también -4.



Esto quiere decir que,

$$\boldsymbol{x^2 = 4} \;\; (1) \qquad o\ bien \qquad \boldsymbol{x^2 = -4} \;\; (2)$$

Nuestro problema ahora es encontrar, por un lado, todos los números reales que elevados al cuadrado den 4 y por el otro, todos los números reales que elevados al cuadrado den -4. Pero como el cuadrado de un número sólo puede ser positivo o cero, la segunda ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$. Mientras que la primera tiene dos soluciones,

$$x^2 = 4 \qquad (1)$$
$$\boxed{\boldsymbol{x = -2}} \;\vee\; \boxed{\boldsymbol{x^2 = 2}}$$

Observación: No olvidemos verificar las dos soluciones encontradas, $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$.
¡Notemos que todo número elevado al cuadrado es siempre positivo, el resultado no cambiaría si los módulos no estuvieran!

1.4. Intervalos Reales

Supongamos que una empresa ferroviaria ofrece un servicio regular y con una frecuencia de 20 minutos. Si una persona llega a la estación de forma aleatoria, ¿cuánto tiempo deberá esperar hasta que llegue el tren?
Primero pensemos en las situaciones extremas, es decir, si la persona llega al andén en el momento exacto en el que el tren arriba, el tiempo de espera es 0 minutos. Pero, si llega en el momento exacto en el que el tren parte, tendrá que esperar 20 minutos hasta el próximo tren. Sin embargo, puede ser que la persona espere 10 minutos o 10 minutos con 45 segundos, incluso si medimos el tiempo con un instrumento de medición muy preciso, puede esperar 10 minutos, 45 segundo y 23 centésimas. Lo que queremos ejemplificar es que entre 0 y 20 existen tantas posibilidades que resulta imposible poder numerarlas a todas. ¿Cómo damos entonces la respuesta a la situación planteada?
Utilizando una notación adecuada, es bastante sencillo. Si llamamos t al tiempo de espera y considerando que t puede tomar los valores 0, 20 o cualquier otro comprendido entre ellos, podemos escribir,

$$0 \leq t \leq 20$$

o utilizando la notación de intervalo,

$$t \in [0; 20]$$

Cabe aclarar que tanto 0 como 20 (extremos del intervalo) pertenecen a este, al igual que todos los valores comprendidos entre ellos. Por este motivo se utilizan corchetes y se lo llama intervalo cerrado.
Supongamos ahora que una persona se para en una esquina y decide registrar el tiempo que tarda en pasar por la misma un auto amarillo. ¿Cuánto tiempo deberá esperar?
Pensemos nuevamente en las situaciones extremas. Puede darse que, en el momento exacto de llegar a la esquina pase un auto amarillo, con lo cual el tiempo de espera será $t = 0$. Ahora, pensar en el tiempo máximo de espera es un tanto más complejo ya que no es posible establecerlo de antemano. Una persona puede estar parada por horas en una esquina sin que pase un auto amarillo. En este caso podemos afirmar que el tiempo de espera es mayor o igual a cero.

$$t \geq 0$$

y en notación de intervalo,

$$t \in [0; +\infty)$$

El 0 pertenece al intervalo, al igual que todos los valores mayores a él. Pero ∞[1] **NO** es un número, entonces es imposible que pertenezca al intervalo, por este motivo se utiliza un paréntesis, en lugar de corchete.
Un intervalo es un subconjunto de la recta $\mathbb{R}$ y se utiliza para identificar y definir todos los números reales que cumplen con una determinada condición. Por ejemplo, dados dos números cualesquiera a y b, ¿podríamos enumerar todos los reales comprendidos entre ellos?

Si bien los números buscados sólo deben cumplir las condiciones de ser menores que b y mayores que a, debemos recordar que entre dos números reales cualesquiera existen infinitos reales más. De ahí la necesidad de buscar una manera sencilla de expresarlos, y esto se logra a través de la notación de intervalo.
Un intervalo según incluya o no, dentro de dicho conjunto, a sus extremos puede ser:

- **Abierto**, cuando los extremos a y b no están incluidos en el conjunto.

Como se trata de todos los números reales mayores que a y menores que b, podemos escribir de forma abreviada:

$$a < x < b$$

y en notación de intervalo,

$$(a; b)$$

- **Semiabierto**, cuando uno de los extremos a o b no están incluido en el conjunto y el otro sí.

[1] El símbolo ∞ se utiliza para indicar cuando algo no tiene ni puede tener fin, es decir, es mayor (o menor) que cualquier cantidad asignable.

En este caso buscamos expresar a todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b. Es decir, a pertenece al conjunto, pero b no.

$$a \leq x < b$$

y en notación de intervalo,

$$[a; b)$$

Notemos que si uno de los extremos está incluido se utiliza un corchete y si no lo está debemos indicarlo colocando un paréntesis. Entonces existe para este caso, otra posibilidad:

$$a < x \leq b$$

y aquí el uso de paréntesis y corchete se invierte,

$$(a; b]$$

- **Cerrado**, cuando los extremos a y b están incluidos en el conjunto.

$$a \leq x \leq b$$

y en notación de intervalo,

$$[a; b]$$

Ejemplo 4: *Encontrar y expresar en notación de intervalo, el valor de todos los x pertenecientes al conjunto $\mathbb{R}$ tales que:*

$$x^2 \leq 4$$

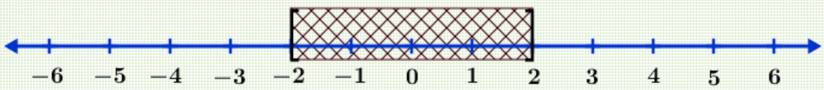
Nos piden encontrar los valores reales, cuyo cuadrado es cuatro "o menor a cuatro". Entonces, 2 y -2 no son los únicos resultados posibles, sino que se trata de ellos dos e infinitos números más.
Cualquier número positivo menor o igual a 2 verifica la inecuación planteada, es decir, nos queda:

$$0 \leq x \leq 2$$

Sin embargo, cualquier número negativo mayor o igual a -2 también verifica la inecuación planteada:

$$-2 \leq x \leq 0$$

Entonces, la unión de estos dos conjuntos es la solución de la inecuación planteada, que además podemos representar en la recta real:



Se trata de todos los números reales menores que 2 y mayores que -2. Es decir,

$\boxed{\boldsymbol{-2 \leq x \leq 2}}$ y en notación de intervalo $\boxed{\boldsymbol{x \in [-2; 2]}}$

Ejemplo 5: *Escribir las siguientes proposiciones en términos de desigualdades y valores absolutos.*

(a) x está entre -6 y 6

Esta proposición se puede expresar a través de la siguiente desigualdad:

$$\boxed{\boldsymbol{-6 < x < 6}}$$

Se trata del intervalo real $(-6; 6)$, que representa a todos los números reales que no superan su distancia al cero en cinco unidades. Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto podemos escribir también,

$$\boxed{\boldsymbol{|x| < 6}}$$

(b) La distancia entre 4 y 11

Para calcular la distancia entre dos números solo basta con encontrar la diferencia entre ellos. Dependiendo el orden en que tomemos dichos números, el resultado puede ser positivo o negativo. Pero, como una distancia es <u>siempre positiva</u> (o cero), debemos plantear el valor absoluto de esta diferencia:

$$|11-4| = |4-11| = \boxed{\mathbf{7}}$$

(c) La distancia entre x y -3 es menor a 8

Siguiendo la idea de lo planteado en el ítem anterior:

$$|x-(-3)| < 8$$
$$|x+3| < 8$$
$$-8 < x+3 < 8$$

Si restamos en todos los miembros -3:

$$-8 - \mathbf{3} < x + 3 - \mathbf{3} < 8 - \mathbf{3}$$
$$\boxed{\boldsymbol{-11 < x < 5}}$$

1.5. Operaciones en $\mathbb{R}$

1.5.1. Operaciones elementales

En las secciones anteriores trabajamos sobre las propiedades que caracterizan al conjunto $\mathbb{R}$. En esta sección veremos qué propiedades caracterizan a las operaciones que se definen en este conjunto. Recordemos que las dos operaciones elementales son la **adición** (al resultado de una adición se lo llama suma) y la **multiplicación** (al resultado de una multiplicación se lo llama producto).

¿La suma de dos números reales de uno de sus subconjuntos es siempre un número real del mismo subconjunto? ¿y el producto?

1.5.2. Propiedades de la adición y la multiplicación

Si consideramos tres números reales cualesquiera, podemos obtener la suma (o también el producto) entre ellos, sin importar cómo asociemos dichos números durante la operación. Veamos un ejemplo,

Adición	Multiplicación
$(2+4)+7=2+(4+7)$	$(2\cdot 4)\cdot\ 7=2\cdot(4\cdot 7)$
$6+7=2+11$	$8\cdot 7=2\cdot 28$
$13=13$	$56=56$

Esto se debe a que tanto en la adición como en la multiplicación se verifica la propiedad asociativa.
También se cumple, en ambas operaciones, la propiedad conmutativa. Implica que si consideramos ahora dos números reales cualesquiera podemos obtener la suma (o el producto) sin importar el orden de estos durante la operación. También podemos ejemplificar esta propiedad,

Adición	Multiplicación
$3+6=6+3$	$3\cdot 6=6\cdot 3$
$9=9$	$18=18$

Existen además elementos distintivos del conjunto para estas operaciones, como es el caso del **elemento neutro**. El neutro para la adición es aquel número que, al sumárselo a cualquier otro, el resultado da siempre este último. Al observar los siguientes ejemplos,

$$0+4=4$$
$$0+8{,}9=8{,}9$$
$$0+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

podemos deducir que el único elemento neutro para la adición es el cero.

¿Cuál es el elemento neutro en la multiplicación?

Otro elemento que distinguiremos y que resulta de gran utilidad para definir otra operación, es el inverso.

El **inverso aditivo** de un número real a, también llamado opuesto que se denota $-a$, es aquel número que sumado al primero da como resultado el neutro para esta operación, es decir 0.
El **inverso multiplicativo** de un número real, es aquel número que multiplicado por este da como resultado también el neutro de dicha operación.

Adición	**Multiplicación**
$4+(-4)=0$ $-8{,}5+(8{,}5)=0$ $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$	$9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)=1$ $-6\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=1$ $\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)=1$

¿Todo número real tiene inverso aditivo? ¿todo número real tiene inverso multiplicativo?

En general, si consideramos tres números reales cualesquiera, es decir, $a, b, c \in \mathbb{R}$. En dicho conjunto y con las operaciones mencionadas, se cumplen siempre las siguientes propiedades:

1. *Asociativa,*

   $a+(b+c)=(a+b)+c$ Asociativa de la adición

   $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ Asociativa de la multiplicación

2. *Conmutativa,*

   $a+b=b+a$ Conmutativa de la adición

   $a\cdot b=b\cdot a$ Conmutativa de la multiplicación

3. *Existencia de elemento neutro,*

   $a+0=a$ Elemento neutro de la adición

   $a\cdot 1=a$ Elemento neutro de la multiplicación

4. *Existencia de elemento inverso,*

   $a+(-a)=0$ Inverso aditivo u opuesto

   $a\cdot\frac{1}{a}=1$ Inverso multiplicativo (con $a\neq 0$)

5. *Distributiva,*

   $a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c$ Propiedad distributiva de la multiplicación

Si bien hemos presentado sólo la adición y la multiplicación, sabemos que dentro de las operaciones más comunes también se encuentran la **sustracción** y la **división**. Sucede que la sustracción entre dos números reales no es otra cosa que la suma entre el primero y el inverso aditivo, por ejemplo,

$$12 - 8 = 12 + (-8) = 4$$

En general,

$$a - b = a + (-b)$$

Y de forma análoga, podemos definir la división entre dos números como la multiplicación del primero por el inverso multiplicativo del segundo (siendo este último, distinto de cero), por ejemplo,

$$12 : 4 = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3$$

En general,

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$$

¿En la sustracción y/o división se verifica la propiedad asociativa? ¿y la conmutativa?

1.5.4. Potenciación

Si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define la potencia *n-ésima* de a como:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\ veces}$$

donde a es la *base* y n es el *exponente*.
Sin embargo, si $a \neq 0$ el exponente se puede ampliar a todo el conjunto de los números enteros, quedando:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a}}_{n\ veces} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\ veces}} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propiedades de la potenciación
En general si $a, b \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Producto de potencias de igual base,*
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2. *Cociente de potencias de igual base,*
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \ ; \ a \neq 0$$

3. *Potencia de potencia,*
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

4. *Distributiva respecto del producto,*
$$(a.b)^n = a^n \cdot b^n$$

5. *Distributiva respecto del cociente,*
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ ; \ b \neq 0$$

Importante: Para que las propiedades, arriba indicadas, estén bien definidas en todos los casos deberemos exigir que $a \neq 0$ cuando n o m sean enteros negativos.

Ejemplo 6: *Hallar el resultado de las siguientes expresiones, aplicando propiedades de la potenciación.*

(a)

$$\left(\frac{3}{2}\right)^8 \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^4\right)^{-2} = \frac{3^8}{2^8} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-8} =$$

$$= \frac{3^8}{2^8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^8 = \frac{3^8}{2^8} \cdot \frac{4^8}{3^8} =$$

$$= \frac{4^8}{2^8} = \frac{(2^2)^8}{2^8} = \frac{2^{16}}{2^8} = 2^{16-8} = \boxed{\mathbf{256}}$$

(b)

$$\left(\frac{\left(2 \cdot \frac{1}{9} : 3^{-1}\right)^{-2}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}\right)^{-1} = \left(\frac{2^{-2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} : 3^2}{\frac{9^2}{4^2} : \frac{3}{2}}\right)^{-1} = \left(\frac{2^{-2} \cdot (9)^2 : 3^2}{\frac{(3^2)^2}{(2^2)^2} : \frac{3}{2}}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{2^{-2} \cdot (3^2)^2 : 3^2}{\frac{3^4}{2^4} : \frac{3}{2}}\right)^{-1} = \left(\frac{2^{-2} \cdot 3^4 : 3^2}{\frac{3^{4-1}}{2^{4-1}}}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{2^{-2} \cdot 3^{4-2}}{\frac{3^{4-1}}{2^{4-1}}}\right)^{-1} = \left(\frac{2^{-2} \cdot 3^2}{\frac{3^3}{2^3}}\right)^{-1}$$

$$= \left(2^{-2} \cdot 3^2 \cdot \frac{2^3}{3^3}\right)^{-1} = (2^{-2+3} \cdot 3^{2-3})^{-1} =$$

$$= (2 \cdot 3^{-1})^{-1} = 2^{-1} \cdot 3 = \boxed{\mathbf{\frac{3}{2}}}$$

1.5.6. Radicación

Si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define la raíz *n-ésima* de a como el número $b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad si \quad b^n = a$$

Por ejemplo,

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad ya\,que \quad 3^4 = 81$$
$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad ya\,que \quad (-2)^3 = -8$$

Sin embargo, observemos que,

$$\nexists \sqrt[2]{-4}$$

Esto se debe a que ningún número elevado a un exponente par puede dar como resultado un número negativo. **Entonces si *n* es par, *a* debe ser siempre mayor o igual que cero para que tenga solución en** $\mathbb{R}$.

Propiedades de la radicación

En general si $a, b \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Producto de raíces de igual base*

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n+m]{a}$$

2. *Cociente de raíces de igual base*

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n-m]{a} \;\; ; \;\; a \neq 0$$

3. *Raíz de raíz*

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

4. *Distributiva respecto del producto*

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

5. *Distributiva respecto del cociente*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \;\; ; \;\; b \neq 0$$

Importante: Si ***n*** es par ***a*** y ***b*** no pueden ser números negativos.

Ejemplo 7: *Hallar el resultado de las siguientes expresiones, aplicando propiedades de la radicación.*

(a) $\sqrt{(-3^{-2})\cdot\sqrt{9^{-1}\cdot}\sqrt[3]{-27}} =$

$$= \sqrt{-\frac{1}{3^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{9}}\cdot(-3)} = \sqrt{-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot(-3)} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \boxed{\mathbf{\frac{1}{3}}}$$

(b) $\sqrt[5]{32\cdot x^6\cdot y^8} =$

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{32\cdot x^6\cdot \mathrm{y}^8} &= \sqrt[5]{2^5\cdot x^5\cdot x^1\cdot \mathrm{y}^5\cdot \mathrm{y}^3}\\ &= \sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{x^5}\cdot\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{y^5}\cdot\sqrt[5]{y^3}\\ &= 2\cdot x\cdot\sqrt[5]{x}\cdot \mathrm{y}\cdot\sqrt[5]{y^3} =\\ &= \boxed{\boldsymbol{2.x\cdot y.\sqrt[5]{xy^3}}}\end{aligned}$$

1.5.7. Potenciación con exponentes racionales

Si con $a\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$ se establece la siguiente relación,

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

elevando a la *m-ésima* potencia ambos miembros de la igualdad,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

Importante: Si $\boldsymbol{n}$ es par $\boldsymbol{a}$ no puede ser un número negativo.

Ejemplo 8: *Hallar el resultado de la siguiente expresión, aplicando propiedades.*

$$\frac{\left(3^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{9 \cdot 5^4}}{\sqrt{\left(5^4 \cdot \sqrt[4]{3^2}\right)}} = \frac{3^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{5^4}}{\sqrt{5^4} \cdot \sqrt{\sqrt[4]{3^2}}}$$

$$= \frac{3^{\frac{1}{4}} \cdot 3 \cdot 5^{\frac{4}{2}}}{5^{\frac{4}{2}} \cdot \sqrt[8]{3^2}} = \frac{3^{\frac{1}{4}} \cdot 3 \cdot 5^2}{5^2 \cdot 3^{\frac{2}{8}}}$$

$$= \frac{3^{\frac{1}{4}} \cdot 3}{3^{\frac{1}{4}}} = 3^{\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4}\right)} = \boxed{3}$$

1.6. Notación científica

Si la velocidad de la luz en el vacío es una constante universal redondeada en 300.000.000 m/s (300 millones de metros por segundo) ¿Qué distancia recorrerá la luz en un año? En este tipo de problemas, es importante tener los datos en una misma unidad. En este caso podríamos plantear las siguientes conversiones,

Años	**Días**	**Horas**	**Minutos**	**Segundos**
1	365	24×365 $= 8760$	8760×60 $= 525600$	525600×60 $= 31536000$

Es decir, 1 año equivale a 31.536.000 segundos.
Si en 300.000.000 segundos recorre 1 metro, entonces en 31.536.000 segundos recorrerá,

$$\mathrm{d} = 31.536.000\, s \times 300.000.000 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 9.460.800.000.000.000 \mathrm{~m}$$

Este resultado es un número muy grande y expresado de esta manera es difícil de operar con él, en notación científica puede expresarse:

$$d \cong \mathbf{3,15} \times 10^7 s \cdot \mathbf{3} \times 10^8 \frac{m}{s}$$

Asociando los factores y sumando los exponentes (dos propiedades de la potencia),

$$d \cong (\mathbf{3,15} \times \mathbf{3}) \times 10^{(7+8)} m$$
$$d \cong 9{,}45 \times 10^{15} m$$

El uso del signo ≅ (aproximadamente igual) en lugar del signo = (igual) se debe a que, al considerar sólo las primeras tres cifras significativas del número, que indica la cantidad de segundos que tiene un año, perdimos exactitud en el cálculo y obtuvimos así una aproximación del resultado exacto. Cualquier número expresado en notación científica tiene la forma,

$$m \times 10^k$$

El número m se denomina «mantisa» y el valor absoluto de la mantisa, debe ser mayor o igual a 1 y menor que 10. Es decir,

$$1 \leq |m| < 10$$

El número k se denomina «orden de magnitud» y es un número entero.
Podemos notar que al trabajar con números muy grandes es ventajoso recurrir a la notación científica, una herramienta bastante eficaz para expresar y resolver operaciones de estas características. Esto es muy útil para mediciones muy grandes o muy pequeñas en astronomía y en el estudio de moléculas, por citar dos ejemplos.
También transmite rápidamente dos propiedades de una medida que son útiles para los científicos, las *cifras significativas* [2]y *orden de magnitud*.
Escribir en notación científica le permite a una persona eliminar ceros delante o detrás de las cifras significativas.

Ejemplo 9:

Número	**Notación científica**	**Cifras significativas**	**Orden de magnitud**
100	1×10^2	1	2
36500	$3{,}65 \times 10^4$	3	4
707.060	$7{,}0706 \times 10^5$	5	5
250.000	$2{,}5 \times 10^5$	2	5
9.000.000	9×10^6	1	6
9.100.000	$9{,}1 \times 10^6$	2	6
0,000000009	9×10^{-9}	1	-9
0,000000000222	$2{,}22 \times 10^{-10}$	3	-10

[2] *Las* ***cifras significativas*** *de un número son las que aportan alguna información. Por ejemplo, se dice que 4,7 tiene dos cifras significativas, mientras que 4,07 tiene tres.*

Ejemplo 10: *Expresar los siguientes números en notación científica.*

(a) 120000000000

Para escribir un número en notación científica debemos determinar la cifra significativa, en este caso es 12. Pero como la mantisa no puede ser un número mayor o igual a 10, tomamos 1,2 como mantisa y queda,

$$\boxed{1{,}2 \times 10^{11}}$$

El exponente se obtiene contando los lugares desde donde colocamos la coma hasta el último cero.

(b) 24300000000

La cifra significativa es 243. Pero recordemos que la mantisa no puede ser un número mayor o igual a 10, entonces, tomamos 2,43 como mantisa,

$$\boxed{2{,}43 \times 10^{10}}$$

(c) $0{,}0000000005$

La cifra significativa, en este caso, es 5. Entonces en notación científica resulta,

$$\boxed{5 \times 10^{-10}}$$

Observemos que se trata de un número comprendido entre 0 y 1. Entonces el exponente debe ser negativo.

(d) $-0{,}00000002$

La cifra significativa, en este caso, es 2. Pero la mantisa es negativa, por tratarse de un número negativo y queda,

$$\boxed{-2 \times 10^{-8}}$$

(e) $0{,}000000000124$

La cifra significativa es 124 entonces tomamos 1,24 como mantisa,

$$\boxed{1{,}24 \times 10^{-10}}$$

1.7. SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino)

SIMELA es la sigla del Sistema Métrico Nacional Argentino. Las siete (7) unidades de base que integran este sistema son,

Magnitud	Nombre	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Intensidad de corriente	Ampere	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de materia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

Algunas otras unidades derivadas de las anteriores las presentamos en la siguiente tabla,

Magnitud	Nombre	Símbolo
Superficie	Metro cuadrado	m^2
Volumen	Metro cúbico	m^3
Velocidad	Metro por segundo	m/s
Aceleración	Metro por segundo cuadrado	m/s^2
Frecuencia	Hertz	Hz
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	$kg/m3$
Velocidad angular	Radián por segundo	rad/s
Fuerza	Newton	N
Presión (tensión mecánica)	Pascal	Pa
Trabajo, energía, cantidad de calor	Jules	J
Potencia	Watt	W
Carga eléctrica	Coulomb	C
Tensión eléctrica, diferencia de potencial o fuerza electromotriz	Volt	V
Intensidad de campo eléctrico	Volt por metro	V/m
Resistencia eléctrica	Ohm	Ω
Conductancia eléctrica	Farad	F
Flujo de inducción magnética	Weber	Wb
Inductancia	Henry	H
Inducción magnética	Tesla	T
Intensidad de campo magnético	Ampere por metro	A/m
Flujo luminoso	Lumen	lm
Iluminación	Lux	lx

1.7.1. Múltiplos y submúltiplos de las unidades

Los múltiplos y submúltiplos decimales de las unidades se forman mediante el empleo de los prefijos indicados en la siguiente tabla, estos prefijos se corresponden con el Sistema Internacional (SI), y son fijados por la Oficina Internacional de Pesos y Medidas.

Prefijo	Símbolo	Factor	Denominación
exa	E	10^{18}	
peta	P	10^{15}	
tera	T	10^{12}	Billón
giga	G	10^{9}	
mega	M	10^{6}	Millón
kilo	k	10^{3}	Mil
hecto	h	10^{2}	Cien
deca	da	10^{1}	Diez
deci	d	10^{-1}	Deci
centi	c	10^{-2}	Centi
mili	m	10^{-3}	Mili
micro	μ	10^{-6}	Millonésimo
nano	n	10^{-9}	
pico	p	10^{-12}	Billonésimo
femto	f	10^{-15}	
atto	a	10^{-18}	

Se recomienda usar un prefijo tal que el valor numérico de la magnitud resulte entre 0,1 y 1000.

Reglas de escritura y uso de los símbolos

- Los nombres de las magnitudes se escriben siempre en minúscula.
- Todos los símbolos de las unidades también se escriben con minúscula, exceptuando aquellas que derivan de un nombre propio.
- Todos los múltiplos y submúltiplos se escriben en minúscula, exceptuando las que llevan prefijo Mega o mayor, que van en mayúsculas.
- La unidad correspondiente a la magnitud de masa contiene el múltiplo kilo (k) por razones históricas, resultando ser el kilogramo (kg), pero para aplicarle otros prefijos se debe trabajar como si la unidad fuese el gramo (g).
- Las unidades no se deben pluralizar y tampoco deben terminar en punto (.) pues no son abreviaturas.

Ejemplo 11: *Realizar las siguientes reducciones*

(a) $3\,dam \;\; a \;\; m$

Tenemos que pasar 3 decámetro a metro. Para ello, debemos multiplicar por el factor correspondiente, indicado en la tabla

$$3\ dam = 3 \times 10^1 m = \boxed{\mathbf{30\ m}}$$

(b) $4hg \;\; a \;\; g$

Tenemos que pasar 4 hectogramo a gramo.

$$4\ hg = 4 \times 10^2 g = \boxed{\mathbf{400\ g}}$$

(c) $12\ mA\ a\ A$

12 miliAmpere a Ampere.

$$12\ mA = 12 \times 10^{-3} A = 1{,}2 \times 10^{-2} A = \boxed{\mathbf{0,012A}}$$

(d) $16\ m\ a\ km$

16 metro a kilómetro. Siempre que partimos de la unidad hacia un prefijo o sufijo de ella debemos dividir por el factor correspondiente, indicado en la tabla.

$$16\ m = \frac{16}{10^3} km$$

$$16\ m = 16 \times 10^{-3} km = 1.6 \times 10^{-2} km = \boxed{\mathbf{0,016\ km}}$$

(e) $20\ mA\ a\ nA$

20 miliAmpere a nanoAmpere. Primero pasamos los 20 miliAmpere a Ampere, multiplicando por el factor correspondiente,

$$20\ mA = 20 \times 10^{-3} A$$

Luego pasamos los Ampere obtenidos a nanoAmpere, dividiendo por el factor correspondiente,

$$20mA = \frac{20 \times 10^{-3}}{10^{-9}} nA$$

$$mA = 20 \times 10^{(-3+9)} nA = 20 \times 10^6 nA = \boxed{\mathbf{2 \times 10^7 nA}}$$

1.9. Aplicaciones físicas: el proceso de medición

En el diccionario de la RAE encontramos la siguiente definición para medir: comparar una cantidad con su respectiva unidad, con el fin de averiguar cuántas veces la segunda está contenida en la primera. Al resultado de la medición se lo llama «medida».

Denominaremos **medición directa** aquella que se obtiene con un instrumento de medición que compara la magnitud con un patrón, por ejemplo, si queremos medir el diámetro de la cabeza de un tornillo lo podremos hacer con un Vernier y estaríamos comparando el tornillo con la escala que tiene el Vernier.

Si necesitamos conocer el volumen de un objeto prismático rectangular, una opción sería sumergir dicho objeto en una probeta graduada con líquido, y medir directamente cuánto aumentó el volumen en el interior de la probeta. Ese incremento será una medición directa del volumen del objeto. Pero si no disponemos de un recipiente graduado, también podríamos medir con una regla las longitudes de las tres aristas representativas del prisma, es decir, su ancho, su largo y su altura, y luego calcular el volumen como el producto de estas tres magnitudes. En este caso estamos hablando de una **medición indirecta**, ya que, si bien las tres magnitudes fueron medidas en forma directa, el volumen resultante surge de una operación matemática entre ellas.

Existe un gran número de instrumentos de medición, por ejemplo, si necesitamos medir una longitud, podemos utilizar una regla, un calibre, un micrómetro, etc.

Cada instrumento tendrá una resolución diferente, y esa resolución es la que influirá en mayor medida sobre el resultado de la medición.

La elección del instrumento no dependerá solamente de la magnitud, sino también de la **apreciación del instrumento** que es la menor división de escala de ese instrumento, en el caso de que necesitemos medir una hoja para comprar una carpeta, es más que probable que una regla, cuya menor división es el milímetro, nos alcance perfectamente para nuestra finalidad, mientras que, si necesitamos medir una pieza de relojería, probablemente un micrómetro es una opción mucho más adecuada.

En el proceso de medición entran en juego la **exactitud** y la **precisión**, por ejemplo, si queremos medir una temperatura con un termómetro digital que puede determinar la centésima de grado, pero está descalibrado y disponemos de un termómetro de mercurio que está bien calibrado, pero es capaz de determinar las décimas de grado, decimos que el termómetro digital es más preciso que el termómetro de mercurio, pero menos exacto.

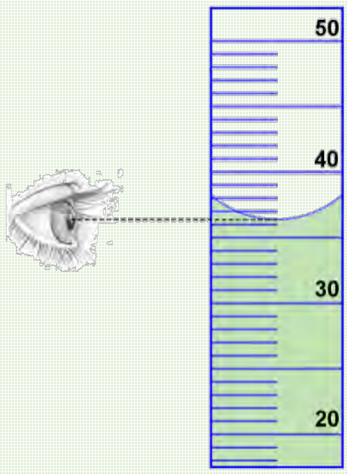
1.9.2. Incertidumbre de una medición física

En el proceso de medición existen limitaciones por los instrumentos usados, el método de medición y por el observador que realiza la medición, produciéndose una diferencia entre el valor real o verdadero de la magnitud y la cantidad obtenida para la misma luego de medir. Esa diferencia inevitable y propia del acto de medir es lo que se denomina **incerteza** o **incertidumbre** o error en la medición.

Coloquialmente al término error se lo considera un sinónimo de equivocación, pero en las ciencias e ingeniería el error de una medición está más bien asociado al concepto de incertidumbre o falta de certeza en la determinación de un resultado por ser como ya se dijo, algo inevitable.

Esa incertidumbre generada por la limitación del instrumento es conocida como **incertidumbre experimental** ($\boldsymbol{\Delta x}$). Cuando una medición se toma en forma directa, su incertidumbre experimental asociada tendrá relación directa con el instrumento de medición, mientras que, si el resultado de la magnitud surge de una medición indirecta, tendremos que calcular la incertidumbre experimental a partir de un proceso al que llamaremos propagación de incertidumbres.

Ejemplo 12: *Queremos medir la cantidad de líquido en una probeta, que está graduada y la división más chica es de* $1\ ml$.



Si comparamos los valores obtenidos por varias personas o varias mediciones de la misma persona podemos ver que no coinciden, por ejemplo, tenemos estas mediciones: $36\ ml$, $37 ml$.

Podemos ver que están comprendidos entre un valor mínimo $L_m = 36\ ml$ y un valor máximo $L_M = 37\ ml$ siendo el intervalo de incertidumbre

$$[L_m; L_M] = [36\ ml; 37\ ml]$$

Tomaremos como valor representativo al punto medio, es decir,

$$\frac{36+37}{2} = 36{,}5$$

este valor representa al resultado más probable de la medición y se lo simboliza,

$$L_0 = 36{,}5\ ml$$

La incertidumbre experimental Δx será la mitad de la longitud del intervalo de incertidumbre $[L_m; L_M] = [36\ ml; 37\ ml]$, es decir,

$$\Delta L = \frac{37-36}{2} = 0{,}5\ ml$$

Podemos decir entonces,

$$\boxed{\mathbf{36{,}5\ ml \pm 0{,}5\ ml}}$$

o diremos que la cantidad de líquido en la probeta está entre $36\ ml$ y $37\ ml$, es decir pertenece al intervalo,

$$\boxed{\mathbf{[36\ ml; 37\ ml]}}$$

1.9.3. Valor representativo e incertidumbre experimental

Consideremos una magnitud que representaremos con la letra L. Tomaremos como **valor representativo** de la medición al punto medio del intervalo de incertidumbre $[L_m; L_M]$. Representa al valor más probable del resultado de una medición y se lo simboliza $\boldsymbol{L_0}$

$$\boxed{L_0 = \frac{L_M + L_m}{2}}$$

La semiamplitud del intervalo se denomina **incertidumbre absoluta o experimental**, es siempre positiva y se denota ΔL.

$$\boxed{\Delta L = \frac{L_M - L_m}{2}}$$

Otra variante de expresión del resultado $[L_m; L_M]$ de una medición es,

$$\boxed{L = L_0 \pm \Delta L}$$

Con esto último podemos estar seguros de que el valor verdadero de la magnitud se encontrará siempre dentro del intervalo de incertidumbre.

1.9.4. Incertidumbre relativa

La **incertidumbre relativa de una medición** (ε) es el cociente entre la incertidumbre absoluta y el valor representativo, y nos da una idea de la relevancia o "peso" que tiene la incertidumbre absoluta con respecto al valor representativo adoptado.

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}}$$

ε es una magnitud adimensional, es decir que carece de unidades, dado que es el cociente entre dos magnitudes del mismo tipo.
Puede ser útil definir también **incertidumbre relativa porcentual**, que es el producto de la incertidumbre relativa por 100 %.

$$\varepsilon\,\% = \varepsilon \cdot 100\%$$

Esta forma de expresar la incertidumbre puede ser de ayuda para definir la calidad de una medición, un criterio utilizado es el siguiente:

$\varepsilon\,\% < 0{,}1\,\%$	Muy buenas
$0{,}1\,\% < \varepsilon\,\% < 1\,\%$	Buenas
$1\,\% < \varepsilon\,\% < 2\,\%$	Normales
$\varepsilon\,\% \geq 2\,\%$	Groseras

Para el **Ejemplo 12** donde obtuvimos,

$$L_0 = 36{,}5\,ml \quad y \quad \Delta L = 0{,}5\,ml$$

nos queda una incertidumbre relativa,

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{0{,}5}{36{,}5} = 0{,}01369 \ldots$$

y una incertidumbre relativa porcentual,

$$\varepsilon\,\% = \varepsilon \cdot 100\,\% = 1{,}4\,\%$$

considerada una medición *normal*.

1.9.5. Medición directa con instrumento digital

Cuando realizamos una medición directa con este tipo de instrumentos, adoptamos como incertidumbre experimental la resolución de este. Por lo general, los fabricantes suelen incluir esta información en el producto, por ejemplo, en un termómetro digital, una resolución habitual es $0{,}1°C$. En caso de desconocer este valor, adoptaremos como incertidumbre experimental para el instrumento, la menor división de la pantalla indicadora.
Si medimos el voltaje de un equipo electrónico con voltímetro digital a la décima y en la pantalla observamos $V = 5{,}8V$(Figura 2),

Figura 2

el intervalo de incertidumbre resulta,

$$V = 5{,}8 \pm 0{,}1\,V$$

1.9.6. Medición directa con instrumento analógico longitudinal

Este tipo de mediciones son muy comunes en la Física. Un ejemplo habitual de estos instrumentos son los termómetros analógicos y las reglas. Consisten en una escala longitudinal graduada a intervalos equiespaciados. En este tipo de instrumentos, tomamos como incertidumbre absoluta a la mitad del valor de la menor división.

$$\Delta L = \frac{menor\ división\ de\ la\ regla}{2}$$

Para medir es necesario que el cero de la regla coincida con el origen de la pieza a medir.
Y el valor representativo será el valor de la marca que coincide con el extremo de la pieza, en el caso de la regla; o con el extremo de la columna de mercurio, en el caso del termómetro.

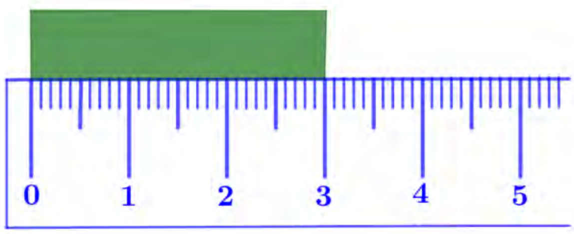


Figura 3

En la Figura 3 un posible resultado de la medición es,

$$L = (3{,}00 \pm 0{,}05\ )cm$$

y otra expresión posible será,

$$L = (30{,}0 \pm 0{,}5)\ mm$$

Si durante el proceso de medición ocurre que el extremo de la pieza no coincide con ninguna marca, en ese caso tomaremos a la marca anterior como cota mínima (L_m) y a la posterior como cota máxima (L_M) y tendremos:

$$L_0 = \frac{L_M + L_m}{2}$$

1.9.7. Mediciones indirectas

Cuando trabajamos con mediciones indirectas, muchas veces el valor representativo y la incertidumbre absoluta quedan con una cantidad arbitraria de decimales, dado que ambos valores se obtienen por el proceso de propagación de incertidumbres. Por este motivo es necesario adoptar algunos criterios para poder indicar adecuadamente el intervalo de incertidumbre.

- Acotar la incertidumbre absoluta (Δx) a una cifra significativa redondeando la cifra al valor inmediatamente superior.
- El valor representativo se redondea en la cifra que se corresponda con la cifra de la incertidumbre experimental, y se redondea a la cifra inmediatamente superior si la cifra siguiente es mayor o igual a 5, y se mantiene igual si la cifra siguiente es menor a 5.

Ejemplo 13: *Finalizado un cálculo de valor representativo e incertidumbre absoluta de un volumen se obtuvo el siguiente resultado:*

$$V = \ 13{,}578668\ cm^3 \pm 0{,}13656\ cm^3$$

Acotamos la incertidumbre absoluta (Δx) a una cifra significativa redondeando la cifra al valor inmediatamente inferior de 0,13656 se redondea a 0,1 (porque 3 < 5).

Ahora debemos modificar el valor representativo 13,578668 cm^3, como aproximamos la incertidumbre absoluta y la dejamos expresada con décimos (0,1) el resultado de la medición indirecta también será con décimos y redondeada,

$$\boxed{\boldsymbol{V = \ 13{,}6\ cm^3 \pm 0{,}1\ cm^3}}$$

Ejemplo 14: *Finalizado un cálculo de valor representativo e incertidumbre absoluta de una superficie se obtuvo el siguiente resultado:*

$$S = 305,\mathbf{5}272\ mm^2 \pm 0{,}2681\ mm^2$$

El resultado de la medición indirecta se expresa como:

$$\boxed{\boldsymbol{S = 305,5\ mm^2 \pm 0,3\ mm^2}}$$

1.10. Actividades del capítulo

1. Completar la tabla, indicando a qué conjuntos pertenecen los siguientes números reales.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$5{,}4\hat{5}$					
$1{,}18$					
$\sqrt{5}$					
$\sqrt{16}$					
$4+\sqrt{3}$					
$-4/5$					
$\pi/4$					
$(-1)^{-1}$					
$(-1/2)^{-1}$					
$1/\sqrt{3}$					
$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$					

2. Ordenar de menor a mayor los números reales dados a continuación.

$$0{,}2\hat{5}\ ;\ 0.25\ ;\ 0,\widehat{25}\ ;\ 0{,}3\ ;\ 0{,}22\ ;\ 0,\widehat{31}\ ;\ 0{,}31\ ;\ 0{,}3\hat{1}\ ;\ 0{,}2\ ;\ 0,\widehat{3}$$

3. Representar en la recta numérica:

$$\sqrt{3}\,;1+\sqrt{3}\,;\frac{7}{3}\,;1-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}-1\,;\frac{5}{3}$$

4. Completar la siguiente tabla encontrando, de ser posible, un número cualquiera a que se encuentre entre los otros dos indicados y que además pertenezca al conjunto especificado.

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}$	5		8
$\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}$	5		6
$\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$	-5		-4
$\boldsymbol{a} \in \mathbb{Q}$	-5		-4
$\boldsymbol{a} \in \mathbb{Q}$	3		4
$\boldsymbol{a} \in \mathbb{I}$	3		4
$\boldsymbol{a} \in \mathbb{Q}$	$3{,}5$		$3{,}6$
$\boldsymbol{a} \in \mathbb{I}$	$3{,}5$		$3{,}51$

5. Indicar (V) o (F) las siguientes afirmaciones, justificando debidamente.
   (a) 30% de b $= \frac{1}{3}$b ☐
   (b) $\frac{1}{6}$ de b $= 0{,}6$b ☐
   (c) $\frac{40}{100}$b $= 0{,}4$ b ☐
   (d) 150% de b $= 1{,}5$b ☐
   (e) Si de un valor b se descuenta el 30%, se obtiene $\frac{2}{3}b$ ☐
   (f) El 25% de 1400 es 249 ☐
   (g) El 362% de $b\ =\ 3b\ +\ 0{,}62\ b$ ☐
   (h) El 10,25% de 4000 $=\ 0{,}01025 \cdot 4000$ ☐

6. En la siguiente tabla se encuentran distintas expresiones de un número racional. Completar las que faltan.

Expresión decimal	Expresión fraccionaria	Expresión porcentual
0,23		
	$\frac{11}{100}$	
		10%
	$\frac{1}{2}$	
0,05		
		19%
	1	
		2.5%
0,001		

7. Una tienda de deporte tiene una promoción del 20% de descuento en zapatillas. Además, si se paga al contado, se le suma un 5% de descuento sobre el valor a pagar. Si una persona compra al contado un par de zapatilla con un precio x, deberá pagar:
   (a) $0{,}70x$
   (b) $0{,}75x$
   (c) $0{,}80x$
   (d) Ninguna de las opciones anteriores.

8. Indicar (V) o (F) las siguientes afirmaciones, justificando debidamente.
   (a) Todo número irracional es un número real. ☐
   (b) Todo número real es irracional. ☐
   (c) Todo número entero es racional. ☐
   (d) Todo número entero es real. ☐
   (e) Todo número racional es entero. ☐
   (f) El cero es un número natural. ☐
   (g) El opuesto de un número entero es natural. ☐
   (h) El opuesto de un número natural es entero. ☐
   (i) El valor absoluto de un número entero es natural. ☐
   (j) Entre dos números naturales, siempre hay un natural. ☐
   (k) Entre dos números racionales, siempre hay un racional. ☐
   (l) Entre dos números irracionales, siempre hay un irracional. ☐

9. Escribir como intervalo el conjunto de los números reales:
   (a) Mayores a -5 y menores que 10.
   (b) Mayores e iguales a 6 y menores a 12.
   (c) Cuyo valor absoluto sea mayor o igual a 3.
   (d) Cuyo valor absoluto sea menor a 12.

10. Completar la siguiente tabla:

Intervalo	**Desigualdad**	**Representación**
		
	$x \geq 7$	
		
$(-\infty; 8]$		
	$-5 \leq x < 4$	
		
$\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$		

11. Explicar el significado de las siguientes expresiones y obtener todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen dicha condición.
   (a) $|x-3| = 6$
   (b) $0 \leq |x| \leq 5$
   (c) $1 \leq |x+2| < 9$

12. Escribir las siguientes proposiciones en términos de desigualdades y valores absolutos, según corresponda y representar gráficamente.
   (a) x está entre -4 y 4.
   (b) La distancia entre 7 y 2.
   (c) La distancia en entre x y -3 es menor a 4.
   (d) x es mayor que 6 o menor que -6.
   (e) x no está a más de 3 unidades de 5.
   (f) La distancia entre dos números x e y es igual a 8.
   (g) El doble de la distancia que hay entre un número x y -2 es igual a 5.

13. Indicar (V) o (F) las siguientes proposiciones $\forall x \in \mathbb{R}$, justificando la respuesta.
   (a) $|-5-(-2)| = |-2-(-5)|$ ☐
   (b) $|-4+7| = |-4|$ ☐
   (c) $|2-\pi| = |\pi - 2|$ ☐
   (d) $|x| = 0$ es equivalente a decir que $x = 0$ ☐
   (e) $x < y \Rightarrow |x| < |y|$ ☐
   (f) $|x| = |-x|$ ☐

14. Expresar en notación de intervalo los siguientes conjuntos.
   (a) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |3x+4| \leq 2\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |3-2x| > 5\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |3x+2| - 4 < 2\}$
   (d) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-2| \leq 1\}$
   (e) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < |3-2x| < 3\}$
   (f) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \left|5 - \frac{1}{2}x\right| < \frac{1}{3}\right\}$
   (g) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \left|\frac{3x-1}{-4}\right| > 2\right\}$

15. Resolver y hallar la solución de forma exacta y con una aproximación de dos decimales.

(a) $\frac{1}{2} + 0,\widehat{15} =$

(b) $\frac{1}{2} + 0,\widehat{15} + \sqrt{5} =$

(c) $\frac{1+5}{\sqrt{3}} =$

(d) $\left(1+\sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{5} =$

(e) $\left(\sqrt{3}+2\right)^2 =$

16. Indicar (V) o (F) las siguientes afirmaciones para todo $x \in \mathbb{R}$, justificando debidamente.

(a) El producto de dos irracionales es irracional. ☐

(b) $\sqrt[n]{-2}$ sólo tiene solución en $\mathbb{R}$ si n es par. ☐

(c) $\sqrt[4]{-81} = -3$ ☐

(d) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ☐

(e) El valor absoluto de un número real es $\sqrt{a^2}$ ☐

(f) El valor absoluto de un número real es $\left(\sqrt{a}\right)^2$ ☐

(g) $a < b \Longrightarrow |a| < |b|$ ☐

17. Efectuar los siguientes cálculos sin utilizar calculadora e indicar a qué conjuntos numéricos pertenecen los resultados hallados:

(a) $[(-1)^3]^5 - [(-2)^3]^2 - (-2^2) =$

(b) $|-2^2 + (-2)^3 - 2^{-1} + (-2)^{-2}| =$

(c) $|-2^2 + (-2)^3 - 2^{-1} + (-2)^{-2}| =$

(d) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 : \frac{1}{27} + \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{11}{100}} =$

(e) $\left(-1+\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{3} =$

(f) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} + \sqrt[3]{-27} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} + \left(\frac{3}{5}\right)^0 =$

(g) $\left(1-\sqrt[3]{-8}\right)^{-1}-\left(10^{-1}+\dfrac{1}{10}\right)=$

(h) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{3}+3^{-3}}-2:\left|\dfrac{3}{4}-1\right|^{-1}=$

(i) $\left|-5-\dfrac{11}{2}\right|:\sqrt{1+\dfrac{9}{16}}=$

18. Aplicando propiedades verificar las siguientes igualdades:

(a) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}\,\sqrt{4+2\sqrt{3}}=2$

(b) $\left(5+2\sqrt{3}\right)^2-10\left(5+2\sqrt{3}\right)+13=0$

(c) $(10\cdot 2^{n+1})^3:(2^{n+2})^3=5^3$

(d) $2^{2-n}\cdot(2\cdot 2^{n+1}+2^{n+2})=2^5$

(e) $\dfrac{\sqrt{x^{-1}\sqrt{x^3}}}{x^{-2}}=x^{\frac{9}{4}}$

(f) $\dfrac{\sqrt[3]{x^5\sqrt{x^3}}}{\sqrt{x^4}}=x^{\frac{1}{6}}$

19. Determinar el o los valores de n que verifican las condiciones planteadas:
(a) $3^n=81$
(b) $5^n+5^{n-1}+5^{n-2}=31$
(c) $2^n>2^8$

20. Aplicando propiedades de la potenciación, simplificar las siguientes expresiones y expresarlas de la forma $b\cdot a^n$

(a) $\dfrac{4^{n+2}}{2^{n-2}}=$

(b) $\dfrac{5\cdot 5^n}{25^{n-2}}=$

(c) $\dfrac{2^n\cdot 2^{n+3}}{4\cdot 2^{n-1}}=$

21. Indicar cuáles de las siguientes expresiones se resolvieron de forma incorrecta y por qué.

(a) $\sqrt{\left(\sqrt{5}+3\right)^2}=\sqrt{5}+3$

(b) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}=\sqrt{5}-3$

(c) $\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}=3-\sqrt{5}$

(d) $\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-3\right)^3}=\sqrt{5}-3$

(e) $\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{5}\right)^3}=\sqrt{5}-3$

22. Completar el siguiente cuadro:

Notación decimal	**Notación científica**
13000000000	
	$2{,}12 \times 10^7$
	$-1{,}1 \times 10^4$
24910000000000	
	$2{,}458 \times 10^{-12}$
	$-3{,}101 \times 10^{-9}$
	$2{,}458 \times 10^{12}$
$0{,}00000000455$	
$-0{,}002$	
180^3	

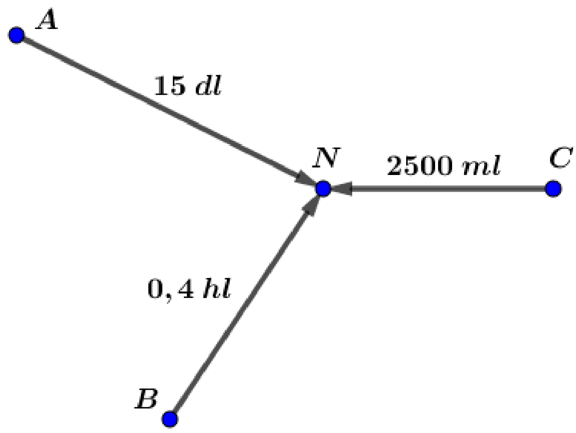
23. El diámetro de una partícula es de $4 \times 10^{-4}\,mm$ ¿Cuántas de esas partículas serían necesarias para rodear la Tierra? Radio medio de la Tierra: 6370 km.

24. La estrella Alioth está a 83 años-luz de la Tierra. Expresar en km esa distancia.

25. Si una persona tiene 5 litros de sangre y aproximadamente 5 millones de plaquetas por cada milímetro cúbico de sangre, calcular en notación científica el número aproximado de plaquetas.

26. La distancia entre la Tierra y la Luna es de $3{,}8 \times 10^5\ km$. Calcular el tiempo que tarda en llegar a la Luna una nave que lleva una velocidad de $200\ m/s$.

27. El siguiente esquema muestra tres tuberías que llevan distintos caudales de agua al nodo N. Indicar, en litros, la cantidad de agua total en dicho nodo.

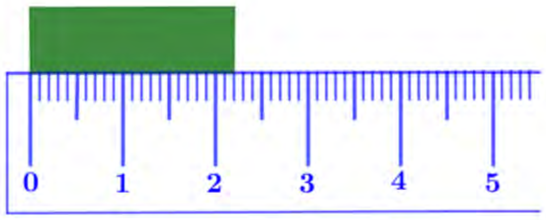


28. Completar la siguiente tabla, haciendo el pasaje de unidad correspondiente. De ser necesario, expresar en notación científica.

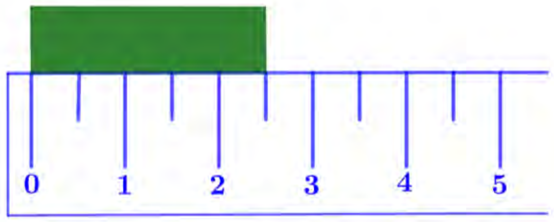
$243\ dm$	m
$25\ km$	mm
$0{,}0018\ nA$	A
$35\ mg$	kg
$128\ mg$	dg
$0{,}005\ \mu A$	kA
$0{,}25\ hm$	cm

29. Para las siguientes mediciones determinar (los valores gravados en las reglas están dados en cm):
   (a) Intervalo de incertidumbre de la medición.
   (b) Valor representativo de la magnitud medida, incertidumbre absoluta e incertidumbre relativa.
   (c) Calidad de la medición.

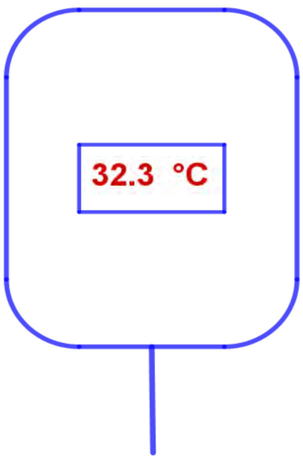
Medición 1:



Medición 2:



Medición 3:



2. Geometría y aplicaciones

2.1. Puntos y rectas

En el capítulo anterior vimos que ante la necesidad de contar y medir se crearon los números, pero luego surgió la necesidad de hacer cálculos y entonces se definieron las operaciones. Sin embargo, el interés por conocer y comprender no terminó allí: a través de la observación de todo lo que nos rodea, el hombre fue ideando los conceptos de línea y figura que dieron origen a la ***Geometría***, rama de la matemática que se ocupa de estudiar las propiedades y medidas de las figuras en el plano (o el espacio).

La civilización babilónica fue una de las primeras culturas en incorporar el estudio de la Geometría. La invención de la rueda, por ejemplo, abrió el camino al estudio de la circunferencia y posteriormente al descubrimiento del número π (pi). Euclides, en el siglo III a. C. configuró la Geometría en forma axiomática[3] y constructiva[4], que estableció una norma a seguir durante muchos siglos. Esto la convierte, sin duda, en una de las ciencias más antiguas.

Antes de desarrollar los conceptos elementales, para nuestro propósito, haremos algunas aclaraciones importantes, respecto a la notación que utilizaremos en este capítulo,

- los puntos serán designados con letras mayúsculas,

3 Axiomático, ca: 1. adj. Incontrovertible, evidente. 2.f. Conjunto de axiomas en que se basa una teoría. Axioma: Cada uno de los principios fundamentales e indemostrables sobre los que se construye una teoría.

[4] *Constructiva: Que puede construirse con regla y compás.*

- las rectas con letras minúsculas,
- los planos con letras griegas.

Por ejemplo, si representamos un plano, una recta y un punto como se observa en la Figura 1:

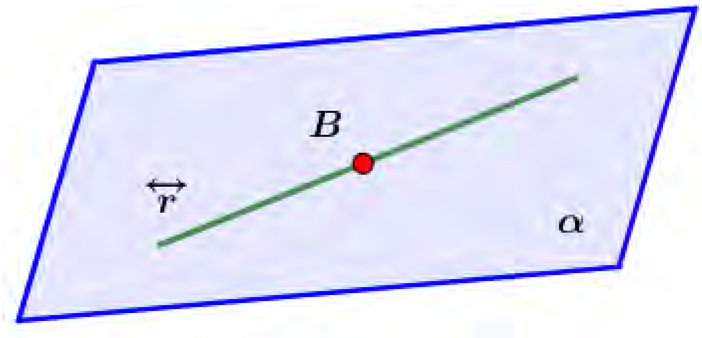
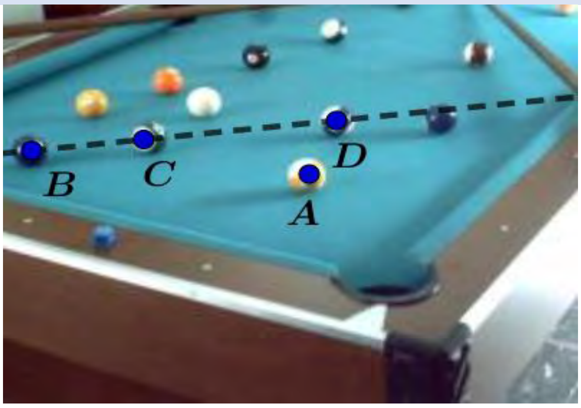


Figura 1

- $B \in \alpha$ se lee: "El punto B pertenece al plano α"
- $B \in r$ se lee: "El punto B pertenece a la recta r"
- $r \subset \alpha$ se lee: "la recta r está incluida en el plano α "

Notemos que los puntos "*pertenecen a…*" mientras que las rectas "*están incluidas en…*"

Modelo Físico



Descripción

B, C y D son colineales.
A, B y C no son colineales.
A, B, C y D están en el mismo plano, son coplanares.

Definición

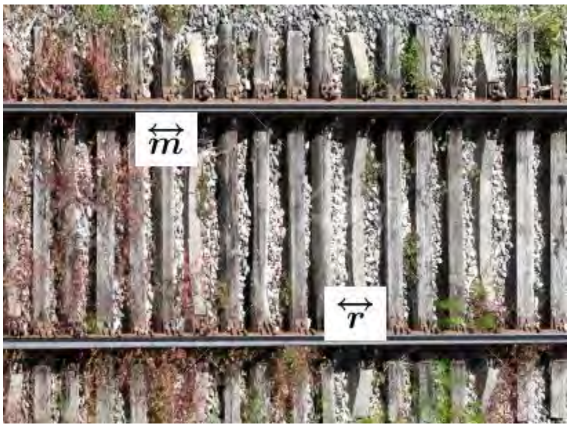
Los **puntos colineales** son aquellos que están sobre una misma recta.
Los **puntos coplanares** están en un mismo plano.

Descripción

Las rectas m y r se intersecan en el punto A.

Definición

Dos **rectas secantes** son aquellas que tienen un único punto en común.



Descripción

Todos los puntos de la recta m están a la misma distancia de la recta r.
m es paralela a r.
Se escribe $m \parallel r$.

Definición

Las **rectas paralelas** son rectas que están en el mismo plano y no se intersecan.

Descripción

Las rectas p, q, r tienen exactamente un punto en común. Son rectas concurrentes.

Definición

Las **rectas concurrentes** son tres o más rectas coplanares que tienen un punto en común.

2.2. Ángulos entre rectas

Un ángulo α es la parte del plano delimitada por dos semirrectas que tienen un mismo punto O de origen, llamado vértice. Si medimos su amplitud en sentido contrario al sentido de giro de las agujas del reloj, se considera positivo. Si lo hacemos en el sentido de giro de las agujas del reloj, se considera negativo (Figura 2).

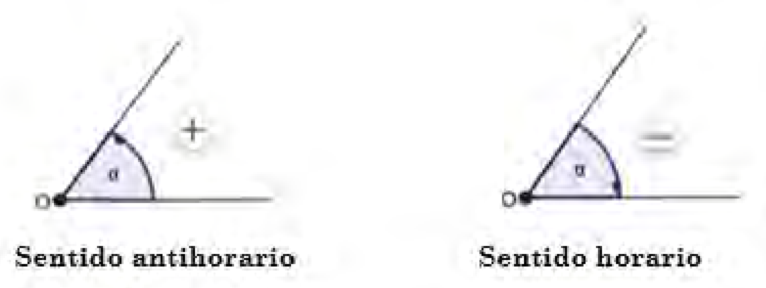
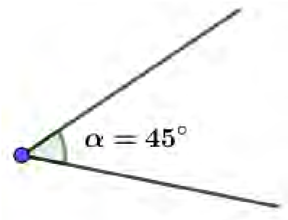


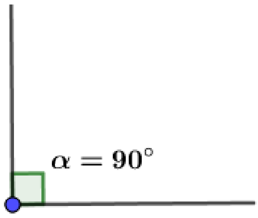
Figura 2

Todo ángulo, según su amplitud puede clasificarse en agudo, recto u obtuso.

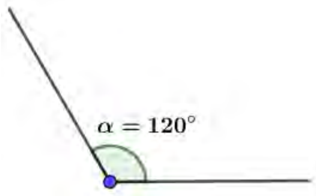
*Un **ángulo agudo** es un ángulo que mide menos de* 90°



*Un **ángulo recto** es un ángulo que mide* 90°



*Un **ángulo obtuso** es un ángulo que mide más de* 90°



2.2.1. Posiciones relativas entre ángulos

En el lenguaje cotidiano cuando dos segmentos, ángulos o figuras tienen las mismas medidas y se puede hacer coincidir exactamente una con otra se dice que son iguales. Sin embargo, los matemáticos entienden que una figura sólo puede ser igual a sí misma, ya que pueden encontrarse diferencias, por ejemplo, ocupar distintos lugares en el espacio. Por ese motivo hablaremos de figuras **congruentes**.

La congruencia se simboliza con el símbolo $\cong$ y definiremos que:

Dos segmentos son congruentes *si tienen la misma longitud.*

Dos ángulos son congruentes *si tienen la misma medida.*

Si consideramos ahora dos rectas que se intersecan, podemos observar que las mismas determinan cuatro ángulos:

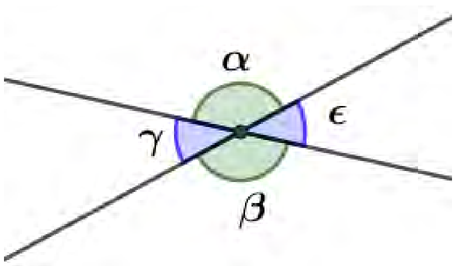


Figura 3

A partir de la Figura 3 podemos definir relaciones entre dichos ángulos.

1. ***Ángulos opuestos por el vértice:*** *Los lados de los ángulos α y β son semirrectas opuestas, por eso estos ángulos se llaman opuestos por el vértice (también son opuestos por el vértice los ángulos γ y ε). Los ángulos opuestos por el vértice tienen la propiedad de ser congruentes.*
2. ***Ángulos adyacentes:*** *Los ángulos α y ε tienen el vértice en común, un lado común que los separa y los otros dos lados son semirrectas opuestas, por eso se llaman ángulos adyacentes. Los ángulos adyacentes tienen la propiedad de sumar siempre 180°.*

3. ***Ángulos suplementarios:*** *Dos ángulos son suplementarios si sus medidas suman 180°, β y ε lo son.*
4. ***Ángulos complementarios:*** *Dos ángulos son complementarios si sus medidas suman 90°, α y ε lo son. (Figura 4)*

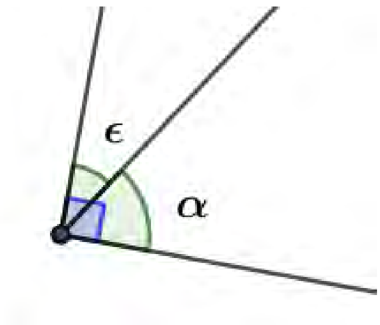


Figura 4

5. ***Ángulos entre paralelas:*** *Dadas dos rectas paralelas y una transversal quedan determinados ocho ángulos:*

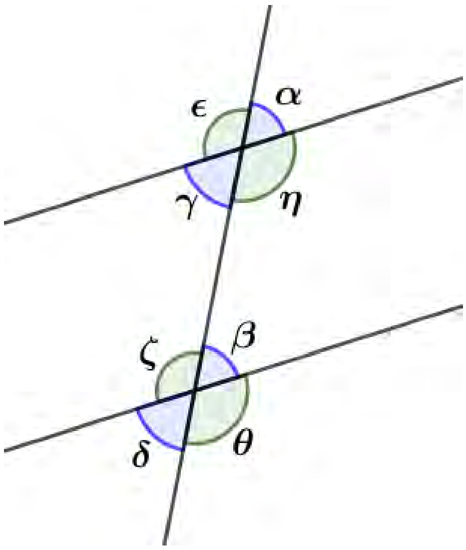


Figura 5

Alternos internos	β y γ ; η y ζ
Alternos externos	α y δ ; ε y θ
Correspondientes	α y β ; γ y δ ; θ y η ; ε y ζ

Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces:

1. *Los ángulos alternos internos son congruentes.*
2. *Los ángulos alternos externos son congruentes.*
3. *Los ángulos correspondientes son congruentes.*
4. *Los ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios.*

Si dos rectas se cortan, pero determinando cuatro ángulos de 90° (Figura 6) se dice que esas dos rectas son **perpendiculares**

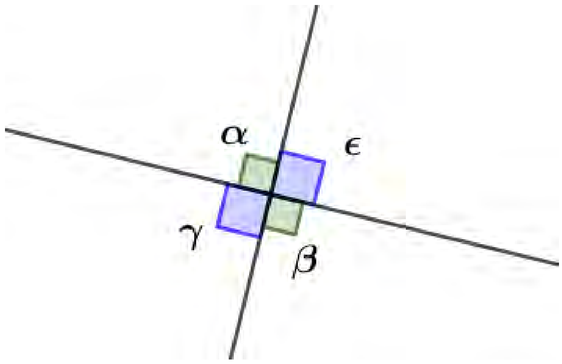
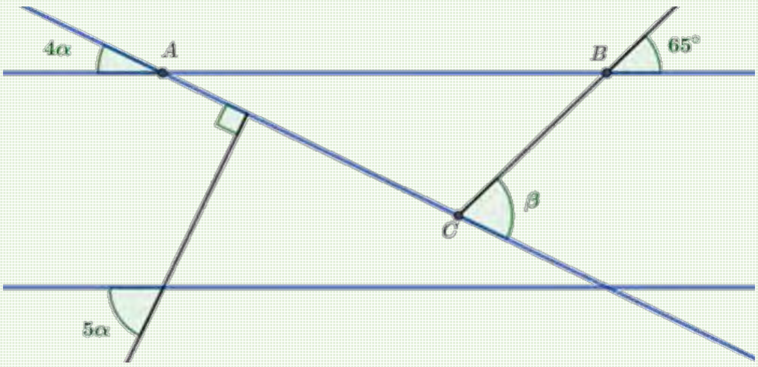
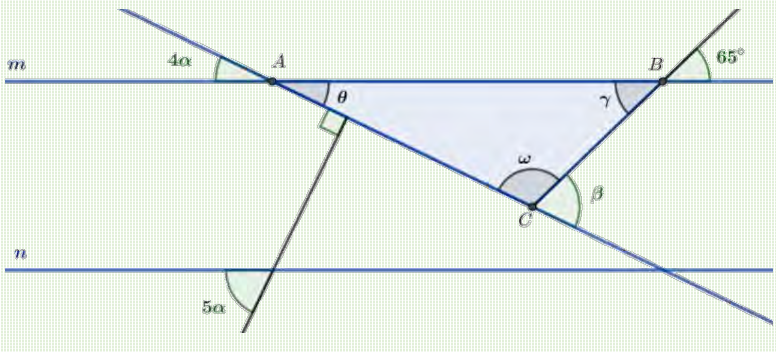


Figura 6

Ejemplo 1: *Sabiendo que las rectas m y n son paralelas, hallar el valor de α y β.*



Observemos que los puntos A, B y C son vértices de un triángulo. Señalemos dicho triángulo en el gráfico e indiquemos los ángulos interiores del mismo:



Como $m \parallel n$ entonces,

$$4\alpha + 5\alpha = 90°$$

$$9\alpha = 90° \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha = 10°}$$

$$\gamma = 65° \quad \text{por ser opuestos por el vértice}$$

y

$$\theta = 4\alpha = 40° \quad \text{(también por ser opuestos por el vértice)}$$

Por la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo,

$$\gamma + \theta + \omega = 180°$$
$$\omega = 180° - 65° - 40° = 75°$$

Finalmente, por ser ángulos suplementarios (adyacentes),

$$\omega + \beta = 180°$$
$$\beta = 180° - \omega = 180° - 75°$$
$$\boxed{\beta = 105°}$$

2.3. Lugares geométricos elementales

2.3.1. Mediatriz de un segmento

Medellín y Chilca Juliana son dos ciudades de Santiago del Estero, cercanas al Rio Dulce que necesitan un servicio adicional de agua (Figura 7).

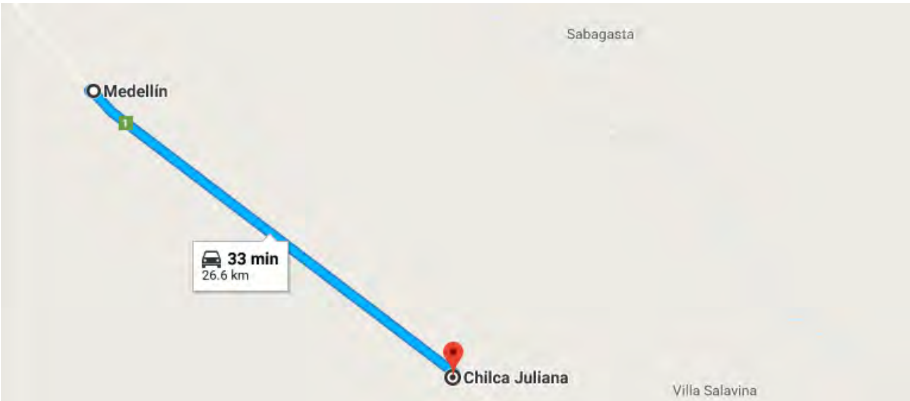


Figura 7

Se decide construir una planta purificadora de agua junto al Rio Dulce y canalizar el agua desde la planta hasta cada ciudad. Como cada una debe pagar la instalación que le corresponde, conviene que la planta se ubique a la misma distancia de las dos ciudades, para ser equitativos en los gastos.
¿Hay una sola ubicación posible para la planta? ¿dónde habría que ubicarla?
No hay un único punto posible para la ubicación de la planta, ya que la recta que pasa por el punto medio del segmento que une las dos ciudades y además es perpendicular a este, contendrá a todos los puntos que están a igual distancia de ambas ciudades.

Esta recta se llama **mediatriz del segmento** determinado por las dos ciudades (Figura 8).

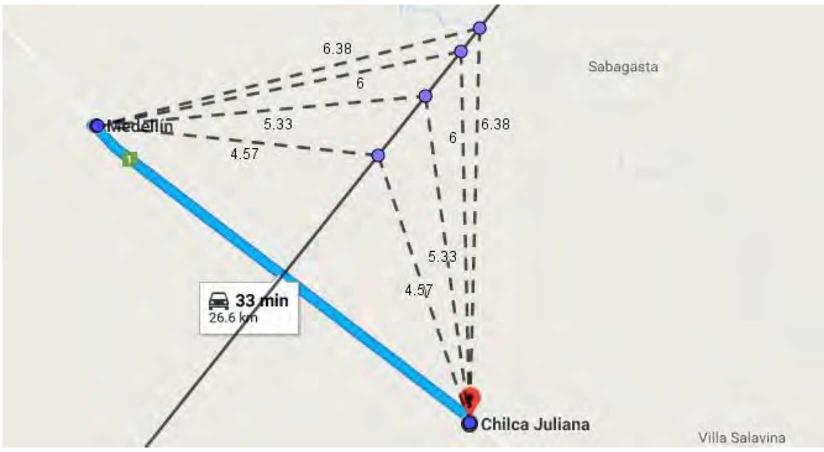


Figura 8

Mediatriz de un segmento: *Dado un segmento AB, todos los puntos del plano que están a la misma distancia de A y de B quedan alineados. Esta línea recta se llama mediatriz del segmento AB.*

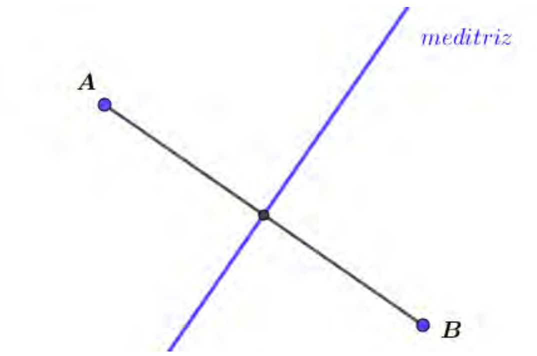


Figura 9

La recta mediatriz de un segmento resulta ser perpendicular a él y pasa por su punto medio (Figura 9).

2.3.2. Bisectriz de un ángulo

En un diamante de béisbol, la segunda base está a la misma distancia de las dos líneas de *foul*. Home, la primera base, la segunda base y la tercera base, están en esquinas de un cuadrado (Figura 10).

La recta que une Home con la segunda base es la bisectriz del ángulo determinado por las dos líneas de foul con vértice en Home.

El montículo del lanzador está a 60 pies y 6 pulgadas de Home ¿Está el montículo del lanzador en el punto medio entre Home y la segunda base?

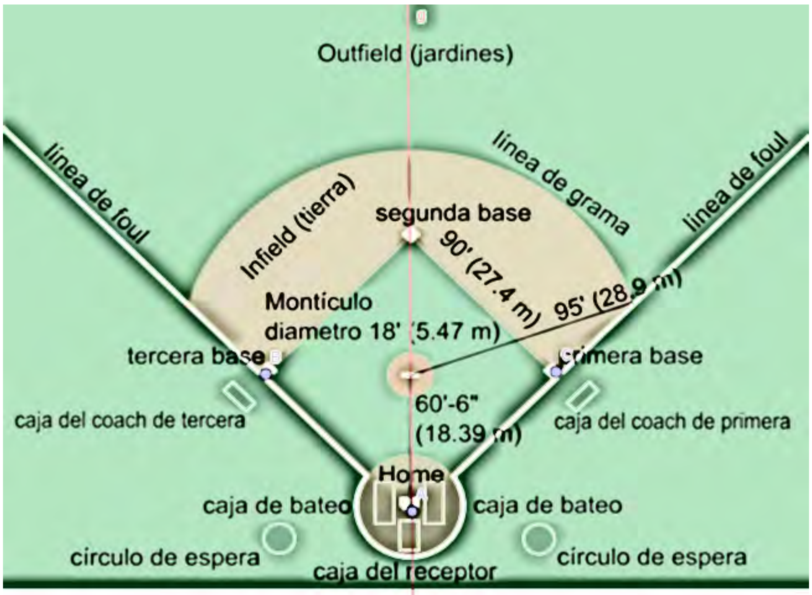


Figura 10

Los cuatro lados del cuadrado que tiene por esquinas a las bases y Home miden *27,4m*. Aplicando el Teorema de Pitágoras podemos calcular la longitud de la diagonal,

$$d = \sqrt{(27,4)^2 + (27,4)^2} = \sqrt{1501.52} \cong 28,75$$

Entonces la distancia que hay entre la segunda base y home es $28,75\,m$, el punto medio está a la mitad de esta longitud:

$$\frac{28,75}{2} m = 19,37m$$

Como el montículo del lanzador no está a esa distancia de Home, no se encuentra en el punto medio.

Bisectriz de un ángulo* α *: *es una recta BD en el interior del ángulo* α*, de manera que* $\beta \cong \varepsilon$

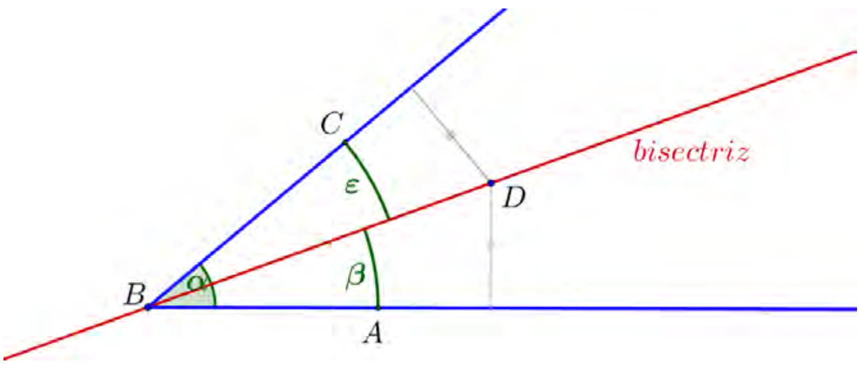


Figura 11

La recta bisectriz de un ángulo es equidistante de los lados del ángulo α.

2.4. Triángulos

El triángulo es un polígono de tres lados, en cuyos extremos se encuentran los vértices. Podemos hacer las siguientes clasificaciones:

SEGÚN SUS LADOS

EQUILÁTERO	ISÓSCELES	ESCALENO
Los tres lados son iguales	Sólo dos lados son iguales	Los tres lados son desiguales

SEGÚN SUS ÁNGULOS

RECTÁNGULO	ACUTÁNGULO	OBTUSÁNGULO
Un ángulo es recto	Los tres ángulos son agudos	Un ángulo es obtuso

2.4.1. Triángulos congruentes

Cuando queremos comparar triángulos entre sí podemos utilizar el concepto de congruencia. Diremos que dos (o más) triángulos son **congruentes** si cada lado de uno es igual a cada lado del otro y los ángulos correspondientes también lo son. En la Figura 12 podemos ver tres triángulos que resultan ser congruentes (independientemente de la posición en la que estos se encuentran).

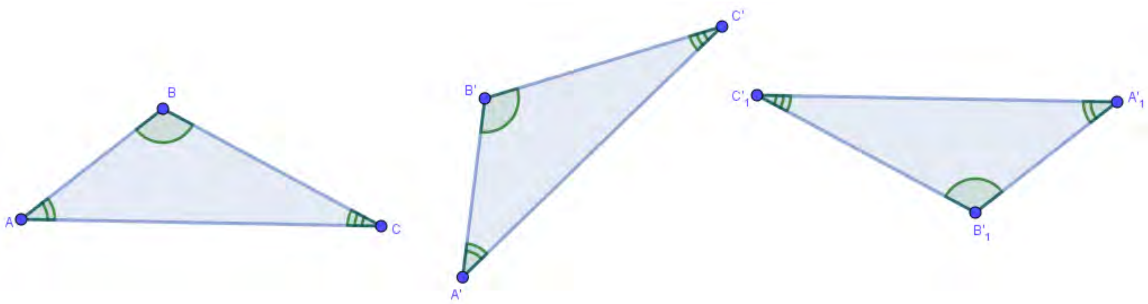
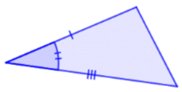


Figura 12

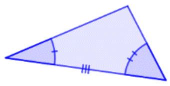
No es necesario corroborar la igualdad de todos sus elementos ya que, gracias a los criterios de congruencia, verificando la igualdad de algunos de ellos se podrá asegurar la igualdad de los restantes.

Criterio LAL



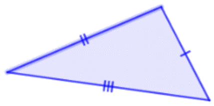
Dos triángulos son congruentes cuando dos lados de uno son iguales a dos lados del otro y el ángulo comprendido por estos dos lados también es igual.

Criterio ALA



Dos triángulos son congruentes cuando dos ángulos de uno son iguales a dos ángulos del otro y el lado comprendido entre estos dos ángulos también es igual.

Criterio LLL



Dos triángulos son congruentes cuando los tres lados de uno son iguales a los tres lados del otro.

Propiedades fundamentales de los triángulos

1. *En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual 180°.*
2. *Si un triángulo tiene dos lados iguales, sus ángulos opuestos son también iguales.*
3. *En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualquiera es siempre mayor que la longitud del tercero (Desigualdad triangular).*

La última propiedad nos dice que si de un triángulo tenemos tres medidas posibles para sus lados y no se cumple que cada una es menor que la suma de las otras dos, entonces, éstas no pueden ser medidas de los lados. Es decir, dicho triángulo no existe ya que no podría ser construido.

Sean tres segmentos $\bar{a} = 3\ cm$, $\bar{b} = 10\ cm$ y $\bar{c} = 14\ cm$
¿Es posible determinar un triángulo que tenga por lados a dichos segmentos?

2.4.2. Altura de un triángulo

Consideremos nuevamente dos rectas, pero esta vez paralelas entre sí. Siempre podemos construir un triángulo ABC de manera tal que un lado cualquiera, en nuestro ejemplo el lado $\overline{AB}$ (Figura 13), se encuentre sobre una de las paralelas y el vértice opuesto C, sobre la otra:

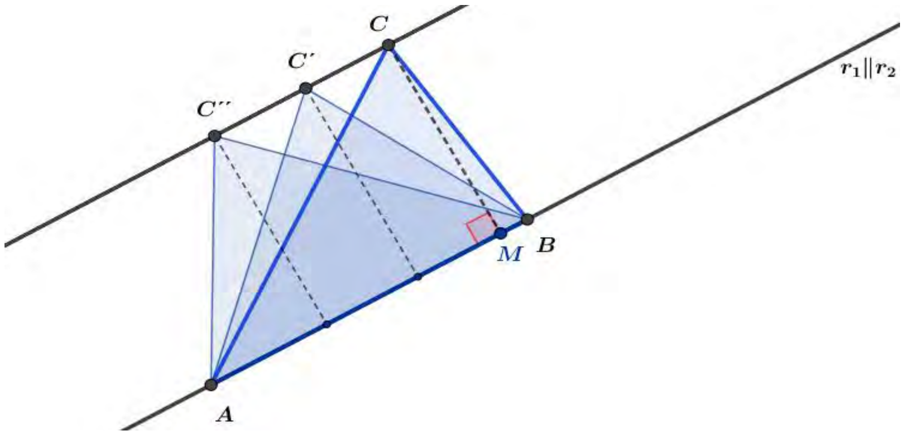


Figura 13

Si "arrastramos" el vértice C a lo largo de la recta, podemos obtener infinitos triángulos, todos ellos con la misma altura respecto al lado $\overline{AB}$.
Para representar el segmento cuya longitud nos da dicha altura, indicado en línea punteada, debemos trazar la perpendicular al $\overline{AB}$ que pasa por el vértice C del triángulo y encontramos así el punto M, pie de la perpendicular. A la longitud del segmento $\overline{\boldsymbol{CM}}$ se la llama **altura del triángulo, relativa al lado *AB***.

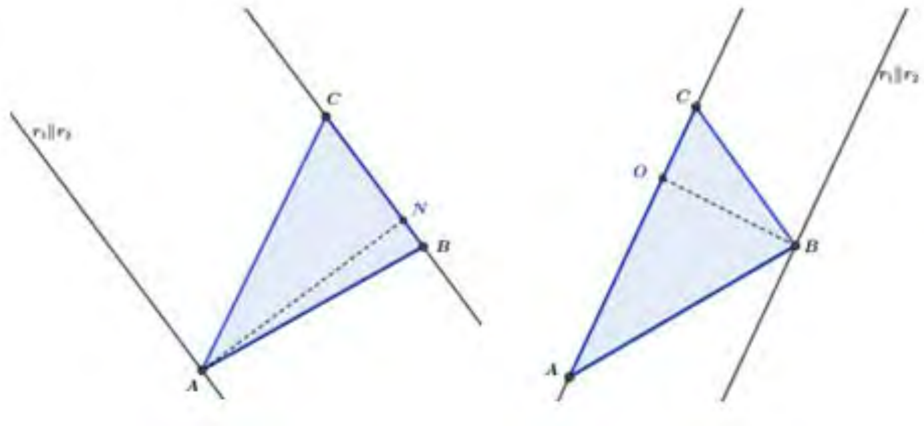


Figura 14

Es importante aclarar que si repetimos este procedimiento respecto al $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, como se observa en la Figura 14, podemos construir las otras dos alturas del triángulo, que no tienen por qué coincidir con la encontrada anteriormente.

¿Cuántas alturas tiene un triángulo? ¿Qué tipo de triángulo tendrá sus tres alturas iguales?

2.4.3. Teorema de Pitágoras

En las especificaciones técnicas de un Smart TV encontramos lo siguiente:

> *Es un modelo extremadamente delgado, tiene un grosor de 1,9 pulgadas. Sus medidas son 49,4 pulgadas de ancho por 28,7 pulgadas de alto y su peso total es de 23 kilos*

> ***TECNOLOGÍA Y FUNCIONES***
> *Su pantalla es de 55 pulgadas, con resolución Full HD (1920x1080). Viene con la tecnología Clear Motion Rate para disfrutar de la misma calidad de imagen desde diferentes ángulos de hasta 240º sin perder luz, nitidez o calidad.*

¿Por qué se anuncia que tiene una pantalla de 55 pulgadas? Es porque el fabricante se refiere a la diagonal de la pantalla.

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Descontando una pulgada de borde,

$$27{,}7^2 + 48{,}4^2 = 3109.85 \Longrightarrow \boxed{AC \cong\ 55{,}8''}$$

Así la diagonal de la pantalla es de aproximadamente 55 pulgadas. Para dar esta respuesta hemos utilizado el Teorema de Pitágoras, veamos un argumento geométrico sencillo de su validez.
Si construimos sobre cada lado del triángulo rectángulo un cuadrado (Figura 15), se cumple que el área del cuadrado apoyado sobre la hipotenusa, lado de mayor longitud y opuesto al ángulo recto, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados, construidos sobre sus otros dos lados, llamados catetos (Figura 16).

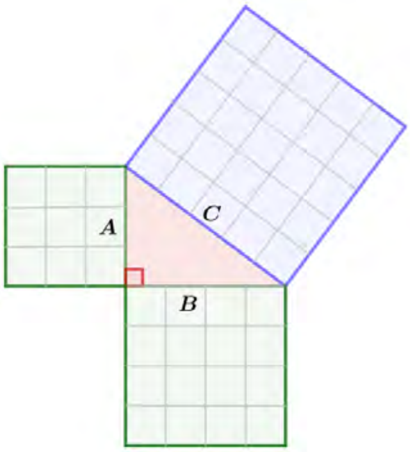


Figura 15

Es decir,

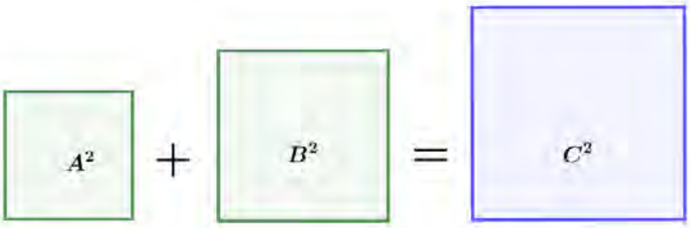
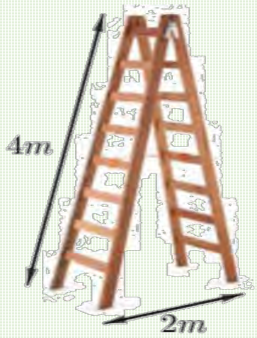


Figura 16

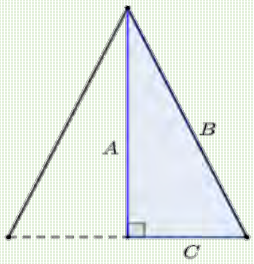
> ***Teorema de Pitágoras:*** *En cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.*

$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2}$$

Ejemplo 2*: Supongamos que tenemos una escalera como muestra la figura y queremos averiguar la altura que alcanza la misma cuando está abierta.*



Este problema podemos resolverlo a través de un triángulo rectángulo, donde la altura de éste es justamente la altura que alcanza la escalera y que es de interés para nosotros averiguar. Representemos gráficamente,



Para el triángulo rectángulo *ABC*, podemos enunciar el teorema de Pitágoras a través de la siguiente expresión
,

$$\boxed{B^2 = A^2 + C^2}$$

Entonces si queremos averiguar la altura que alcanza la escalera, necesitamos hallar la longitud del cateto A,

$$A^2 = B^2 - C^2 \Rightarrow A = \sqrt{(4m)^2 - (1m)^2}$$

$$\mathrm{A} \cong \boxed{\mathbf{3{,}87}\boldsymbol{m}}$$

***Ejemplo 3**: Indicar si es posible construir un triángulo con lados cuyas longitudes sean 5 cm, 12 cm y 13 cm. En caso afirmativo decidir si es o no rectángulo.*

Para determinar si se puede construir un triángulo veamos primero si cumple la propiedad triangular, es decir, si cada lado es menor a la suma de los otros dos, para esto hacemos:

$$5 + 12 > 13$$
$$5 + 13 > 12$$
$$12 + 13 > 5$$

Por un lado, verificamos que es posible construir un triángulo, veamos si además es rectángulo. La hipotenusa siempre es el lado de mayor longitud, entonces tomemos *13 cm* como posible longitud de esta,

$$¿13^2 = 12^2 + 5^2?$$
$$169 = 144 + 25$$
$$169 = 169$$

Así hemos probado que las medidas dadas corresponden a un *triángulo* que es además *rectángulo*.

2.5. Semejanza y proporcionalidad

Recordemos que una razón es el cociente de dos cantidades, expresadas en la misma magnitud. En forma genérica,

$$\frac{a}{b}$$

y una proporción es la igualdad de dos razones. En forma genérica,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Si *a, b, c* y *d* representan longitudes de segmentos, diremos entonces que los segmentos *a y b* son proporcionales a los segmentos *c* y *d.*
En la Figura 17, por ejemplo, tenemos cuatro rectas paralelas cortadas por dos secantes *m* y *n*. Podemos observar que las intersecciones de éstas determinan varios segmentos:

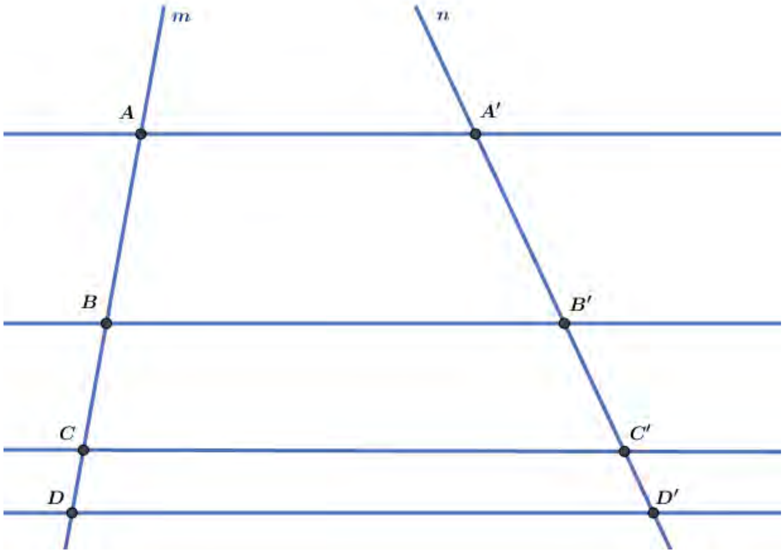


Figura 17

Según el teorema de Tales, bajo estas condiciones, se cumple que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \cdots = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$$

> ***Teorema de Tales:*** *Si tres o más paralelas cortan a dos o más secantes, entonces, los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.*

Este mismo teorema puede aplicarse en triángulos. Supongamos que tenemos un triángulo ABC como el de la Figura 18 y trazamos un segmento paralelo a uno de sus lados, en este caso el lado BC.

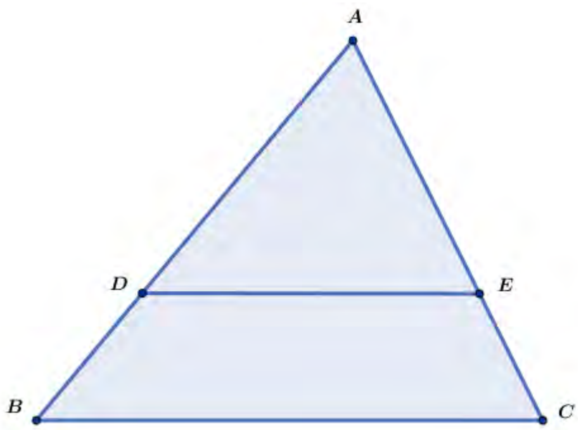


Figura 18

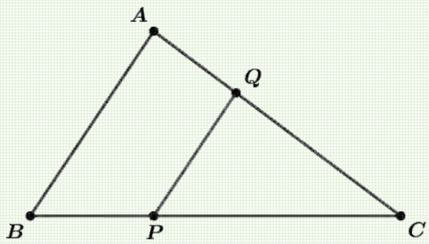
Según el Teorema de Tales, bajo estas condiciones, se cumple que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \cdots = \frac{\overline{BD}}{\overline{CE}}$$

Teorema de Tales en triángulos: *Toda recta paralela a un lado de un triángulo y que corta a los otros dos lados, divide a estos en segmentos proporcionales.*

Ejemplo 4*: Sea ABC un triángulo. Calcular x y $\overline{BP}$ sabiendo que:*

$\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$
$\overline{AC} = 12\ cm$
$\overline{QC} = 9\ cm$
$\overline{BP} = (x - 2\ )cm$
$\overline{BC} = (3x + 4\ )cm$



Aplicando el Teorema de Tales,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}}$$

$$\frac{12\ cm}{3\ cm} = \frac{(3x + 4)\ cm}{(x - 2)\ cm}$$

$$12(x - 2)cm^2 = 3(3x + 4)\ cm^2$$

$$12x - 24 = 9x + 12$$

$$12x - 9x = 12 + 24$$

$$3x = 36$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = 12}}$$

$$\overline{BP} = (x - 2\ )cm = (12\ - 2)\ cm = \boxed{\mathbf{10}\ \boldsymbol{cm}}$$

2.6. Circunferencia

Una circunferencia se define como el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado centro de la circunferencia.

Analicemos la siguiente situación: Elizabeth, vive a 2 km al oeste y a 0,8 km al norte de un club donde suelen presentarse mega espectáculos musicales o deportivos que alteran la tranquilidad del barrio con un radio de 2 km. ¿Es Elizabeth víctima de esta incomodidad? ¿Por qué?
Puede sugerirse referir la situación a un par de ejes cartesianos ortogonales con centro en la sede del club, punto C.
Se dibuja una circunferencia con centro C y radio 2 (Figura 19).

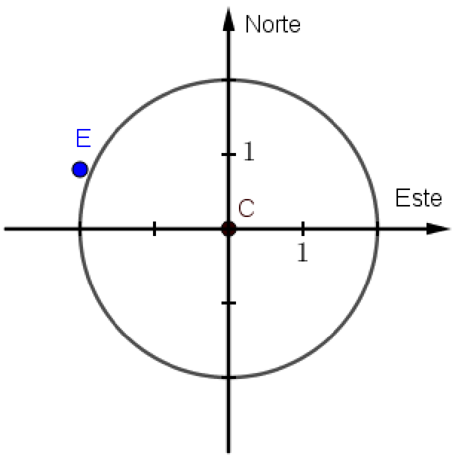


Figura 19

Parecería que la casa de Elizabeth está fuera del radio de las molestias, pero queremos justificarlo adecuadamente.

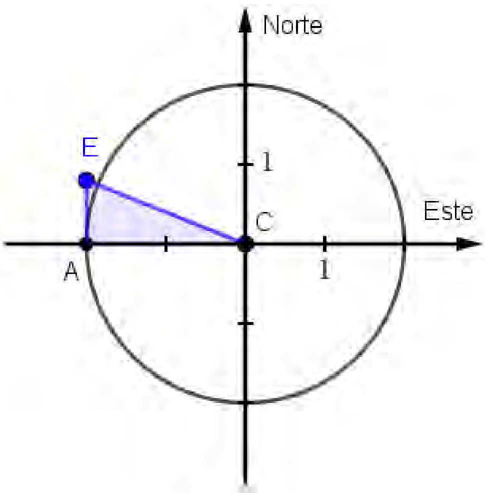


Figura 20

Si consideramos el triángulo rectángulo EAC (Figura 20) y aplicamos Pitágoras, tenemos:

$$\overline{AE}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{EC}^2$$
$$0{,}8^2 + 2^2 = 4{,}64$$

por lo tanto,

$$\overline{EC} \cong 2{,}15km$$

Esto nos indica que la casa de Elizabeth está en zona tranquila.

2.6.1. Elementos de la circunferencia

- **Centro:** punto central que está a la misma distancia de todos los puntos pertenecientes a la circunferencia.
- **Radio:** segmento de recta que une el centro con cualquier punto perteneciente a la circunferencia.
- **Cuerda:** segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de una circunferencia.
- **Diámetro:** segmento que une dos puntos de una circunferencia y contiene al centro de la circunferencia.
- **Recta secante:** recta que corta dos puntos cualesquiera de una circunferencia.
- **Recta tangente:** recta que toca a la circunferencia en un solo punto y es perpendicular a un radio.

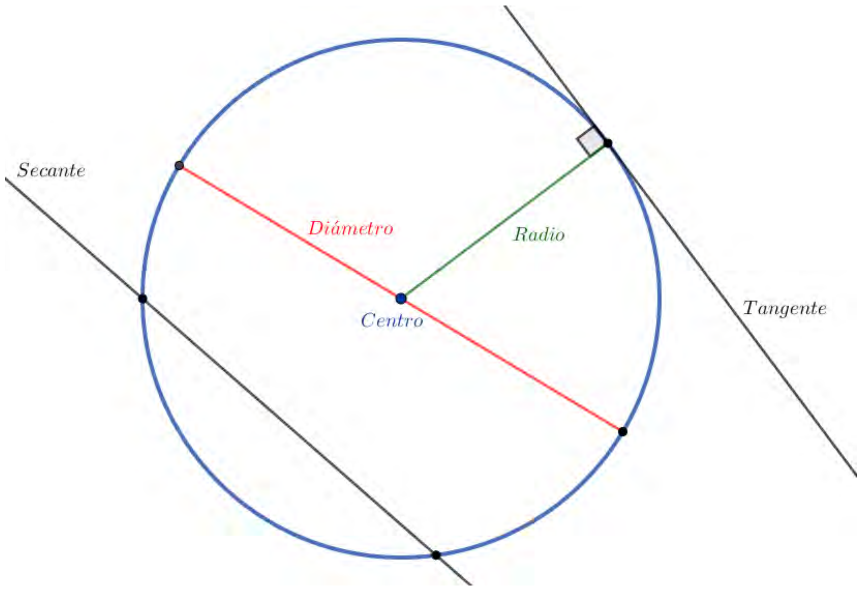


Figura 21

Al respecto, cabe aclarar que una circunferencia queda perfectamente determinada cuando conocemos:

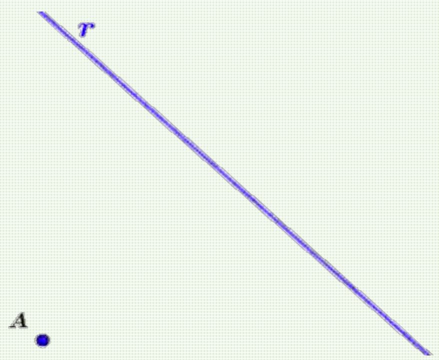
- Tres puntos de esta.
- El centro y el radio.
- El centro y un punto de esta.
- El centro y una recta tangente a la circunferencia.

No debemos confundir el concepto de círculo con el concepto de circunferencia, ya que una circunferencia es una curva, mientras que el círculo es una superficie.

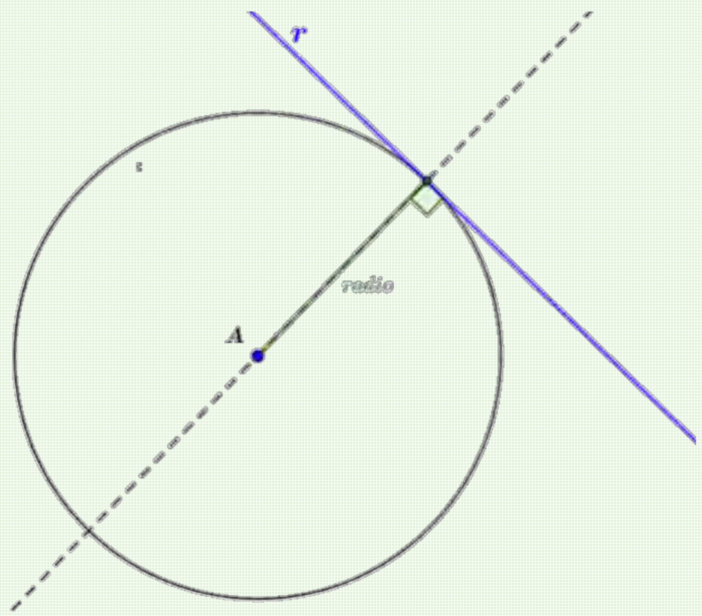
***Ejemplo 5**: Construir una circunferencia,*

(a) Dados el centro y una recta tangente a ella.

Primero representemos los elementos que tenemos. Es decir, un punto (centro de la circunferencia) y una recta.

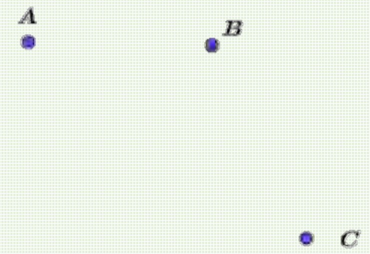


Como la recta es tangente a la circunferencia, tiene que ser perpendicular al radio. Sólo debemos trazar la perpendicular a dicha recta pero que pasa por el centro.

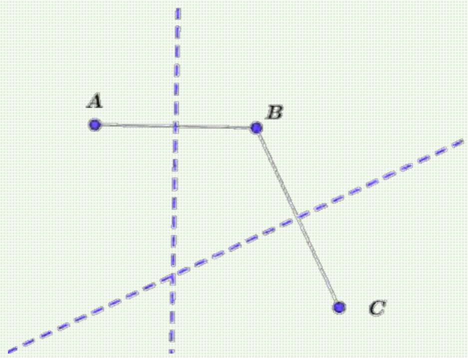


(b) Dados tres puntos de esta.

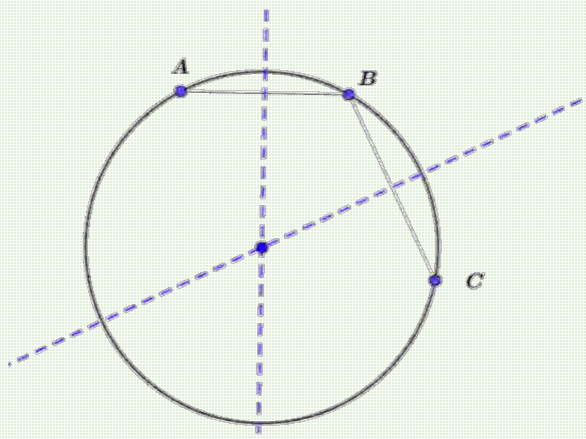
Tenemos tres puntos no alineados (si estuvieran alineados podría no ser posible construir una circunferencia).



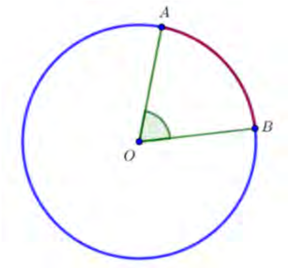
Necesitamos encontrar el centro, que por definición tiene que estar a la misma distancia de los tres puntos. Para esto trazamos dos ***mediatrices*** (recta perpendicular a un segmento que pasa por el punto medio de este).



Todos los puntos que se encuentran sobre una mediatriz estarán a la misma distancia de los extremos del segmento, que utilizamos para construirla. Entonces en la intersección de las dos mediatrices está el punto que se encuentra a la misma distancia de *A, B* y *C*.
¡Es decir, es el centro de la circunferencia que estábamos buscando!

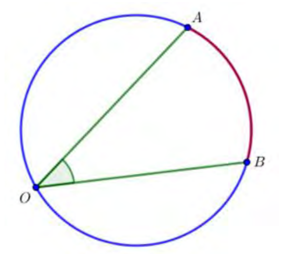


2.6.2. Ángulos que podemos distinguir en una circunferencia



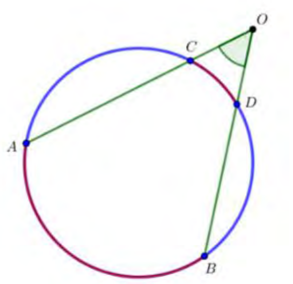
Ángulo central: *es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados lo forman dos radios.*
La medida de un arco es la de su ángulo central correspondiente.

$$\angle AOB = \widehat{AB}$$



Ángulo inscripto: *es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son dos rectas secantes. Mide la mitad del arco que lo abarca:*

$$\angle AOB = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$



Ángulo exterior: *es aquel que tiene su vértice fuera de la circunferencia y los lados son dos secantes o dos tangentes de la circunferencia o uno tangente y otro secante.*

$$\angle AOB = \frac{1}{2}\left(\widehat{AB} - \widehat{CD}\right)$$

2.7. Área y Perímetro

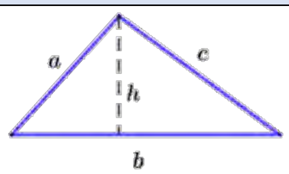
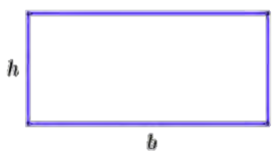
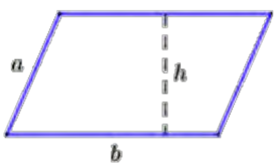
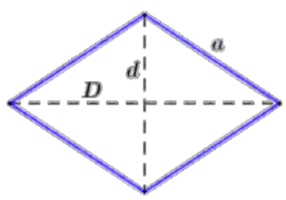
El **perímetro** de una figura se calcula sumando las medidas de los lados que forman su contorno. En cambio, el **área** de una figura es la medida de la superficie de esta; es decir, la medida de su región interior.
Si bien el área y el perímetro son magnitudes que estudiamos juntas, es importante entender que son independientes una de otra. Por lo general nos imaginamos que si aumentamos el área de una figura también lo hará su perímetro, pero esto no es así. Pueden darse, entre dos figuras, las siguientes relaciones:

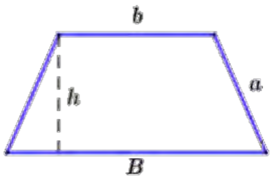
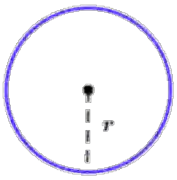
- Una tener menor perímetro, pero mayor área que otra.
- Una tener mayor perímetro, pero menor área que otra.
- Tener igual perímetro, pero diferente área (y al revés también).

Proponer dos polígonos que tengan igual área pero diferente perímetro.

2.7.1. Fórmulas para el cálculo de área y perímetro

En el siguiente cuadro resumimos las fórmulas de cálculo de área y perímetro, de las figuras más comunes.

Figura Geométrica		Perímetro	Área
Triángulo		$P = a + b + c$	$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$
Rectángulo		$\mathrm{P} = 2a + 2b$	$A = b \cdot h$
Paralelogramo		$\mathrm{P} = 2h + 2b$	$A = b \cdot h$
Rombo		$\mathrm{P} = 4a$	$A = \dfrac{D \cdot d}{2}$

Trapecio		$P = 2a + b + B$	$A = \frac{h \cdot (b + B)}{2}$
Circunferencia		$P = \pi \cdot 2r$	$A = \pi \cdot r^2$

***Ejemplo 6**: El área de un triángulo es $2\sqrt{3}\ cm^2$ y la base mide $\sqrt{2}\ cm$. Indicar la opción correcta. La altura mide:*

(a) $\sqrt{23}$ cm
(b) $\sqrt{24}$ cm
(c) $\sqrt{26}$ cm
(d) Ninguna de las opciones anteriores.

El área de un triángulo se obtiene mediante la fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Donde b es la base y h es la altura del triángulo. Reemplazando los datos del problema obtenemos:

$$2\sqrt{3}\ cm^2 = \frac{\sqrt{2}\ cm \cdot h}{2}$$

$$4\sqrt{3}\ cm^2 = \sqrt{2}\ cm \cdot h$$

$$\frac{4\sqrt{3}\ cm^2}{\sqrt{2}\ cm} = h$$

$$\frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} cm = h$$

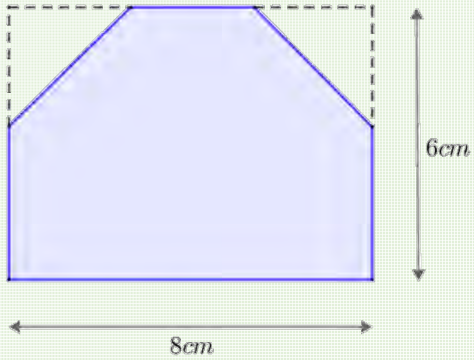
$$2\sqrt{6}\ cm = h$$

$$\sqrt{2^2 \cdot 6}\ cm = h$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sqrt{24}\ cm = h}}$$

La respuesta correcta es entonces la opción *(b)*

Ejemplo 7: *De una hoja rectangular se cortan dos triángulos isósceles de $4\ cm^2$ de área, como se muestra en la siguiente figura:*



Hallar el perímetro de la hoja restante.

Como el área de cada triángulo es de $4\ cm^2$ planteamos,

$$\frac{b \cdot h}{2} = 4\ cm^2$$

Al ser isósceles los triángulos rectángulos, $b = h$

$$b^2 = 8\ cm^2 \to \boxed{b = \sqrt{8}\ cm}$$

Notemos que al representar b una longitud *sólo puede tomar valores positivos* en la ecuación.
Apliquemos ahora el Teorema de Pitágoras para obtener la longitud de la hipotenusa que denotamos con la letra c.

$$c^2 = \left(\sqrt{8}\ cm\right)^2 + \left(\sqrt{8}\ cm\right)^2 = 8\ cm^2 + 8\ cm^2 = 16\ cm^2$$
$$c^2 = 16\ cm^2 \to \boxed{c = 4\ cm}$$

El perímetro de la figura es,

$$P = 8\ cm + 2\left(6\ cm - \sqrt{8}\ cm\right) + 2(4\ cm) + \left(8cm - 2\sqrt{8}\ cm\right) =$$
$$= 24cm + 12cm - 2\sqrt{8}\ cm - 2\sqrt{8}\ cm = \boxed{\mathbf{\left(36 - 8\sqrt{2}\right)\ cm}}$$

2.8. Vectores en $\mathbb{R}^2$

En un instante dado, en la pantalla de un radar se detectan las posiciones de seis barcos representados con los puntos A, B, C, D, E y F, que siguen rutas rectilíneas (Figura 22).

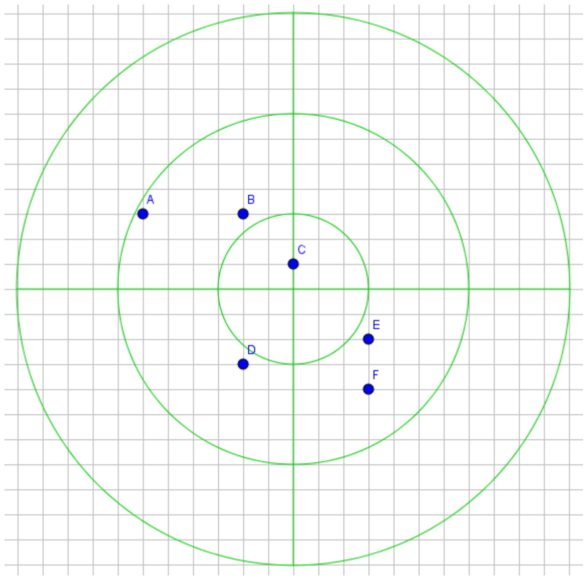


Figura 22

Transcurrido un período de tiempo, las posiciones son las siguientes:

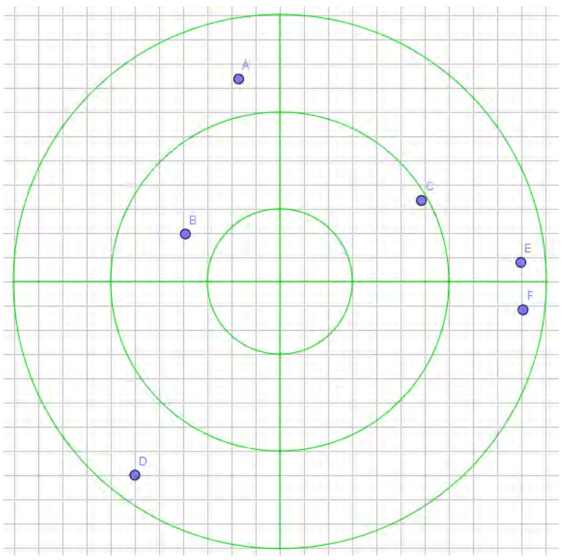


Figura 23

En la Figura 24 podemos observar los desplazamientos de todos los barcos.

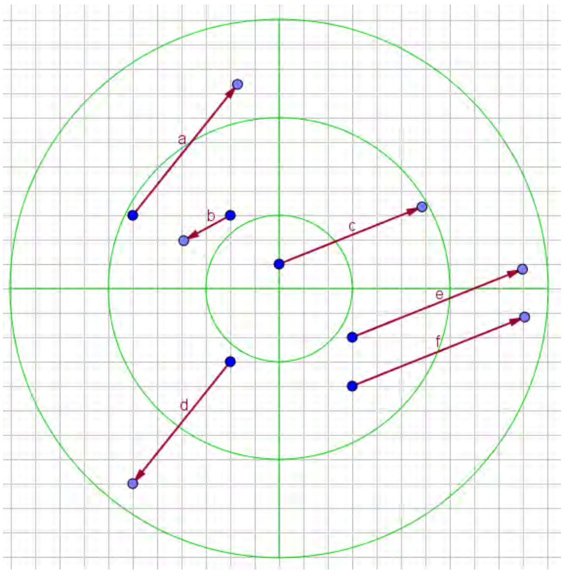


Figura 24

La mejor forma de caracterizar dichos desplazamientos es a través de un vector, ya que nos permitirá describir:

- **Dirección:** está determinada por la inclinación de la recta imaginaria que pasa por los extremos del vector. Por ejemplo, e y f tienen la misma dirección, porque los barcos E y F se desplazaron en forma paralela. En cambio, d y e tienen distinta dirección.
- **Sentido:** en una misma dirección existen dos posibles sentidos, por ejemplo, e y c tienen la misma dirección y sentido, en cambio, a y d tienen la misma dirección, pero sentidos contrarios.
- **Norma:** Se refiere a la longitud de los vectores, en nuestro ejemplo e y f tienen la misma norma, porque los barcos E y F recorrieron la misma distancia sobre una trayectoria rectilínea. En cambio, d y b tienen distinta norma, dado que el barco B recorrió una distancia menor que el barco D.

***Vector:** Un vector es un segmento de recta orientado. Es decir, un segmento en el que se distingue una dirección, un sentido y una norma.*

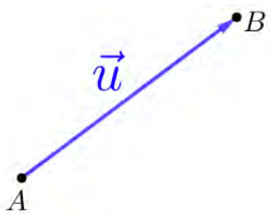


Figura 25

Esta representación permite identificar el **origen** y el **extremo** del vector. En la Figura 25, $\boldsymbol{A}$ es el origen y $\boldsymbol{B}$ es el extremo del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Un vector puede indicarse como lo hicimos antes con dos letras mayúsculas o con una letra minúscula, por ejemplo,

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

Cuando dos vectores están incluidos en rectas paralelas o en la misma recta se dice que tienen la misma **dirección**.

> ***Vectores equipolentes:*** *Dos vectores son iguales o mejor dicho equipolentes si tienen el mismo sentido, la misma dirección y la misma norma.*
> ***Vectores opuestos:*** *Dos vectores son opuestos si tienen la misma dirección y norma, pero sentido contrario.*

2.8.1. Resultante de un sistema

La búsqueda de una fuerza que sea equivalente a otras varias aplicadas es un problema que puede resolverse a través de la suma (o diferencia) de vectores. Para ejemplificar, supongamos que un bote navega en el río, a favor de la corriente. Si su velocidad es de $3\,m/s$, y la velocidad de la corriente es de $2\,m/s$, ¿cómo podemos averiguar la velocidad con que se mueve el bote, respecto de la costa?
Llamemos $\vec{v}_b$ al vector de la velocidad del bote, $\vec{v}_c$ al vector de la velocidad de la corriente y $\vec{v}_r$ a la velocidad resultante. Como el bote se mueve a favor de la corriente, tiene las siguientes características:

- **Dirección:** es la misma que la de los vectores $\vec{v}_b$ y $\vec{v}_c$
- **Sentido**: es la misma que $\vec{v}_b$ y $\vec{v}_c$
- **Norma**: la suma de las normas de $\vec{v}_b$ y $\vec{v}_c$

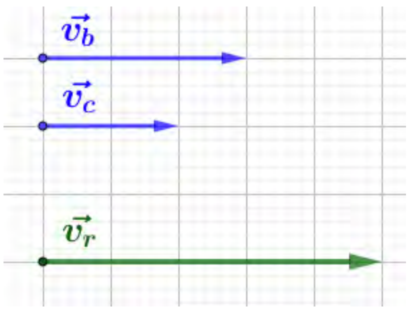


Figura 26

Entonces,

$$\vec{v}_\mathrm{r} = 3\,m/s + 2\,m/s = \boxed{\mathbf{5\,m/s}}$$

Notemos que, si el mismo bote navega en contra de la corriente, la velocidad resultante $\vec{v}_r$ tiene:

- **Dirección**: es la misma que la de los vectores $\vec{v}_b$ y $\vec{v}_c$
- **Sentido:** el de la mayor velocidad, es decir, $\vec{v}_b$
- **Norma**: la diferencia de las normas de $\vec{v}_b$ y $\vec{v}_c$ (no negativa)

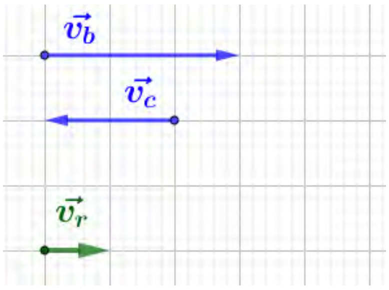


Figura 27

Entonces,

$$\vec{v}_r = 3\,m/s - 2\,m/s = \boxed{\mathbf{1}\,\boldsymbol{m/s}}$$

¿Y si ahora el bote cruza el río en forma perpendicular a la corriente? Esta situación la podemos ver representada en la figura 28.

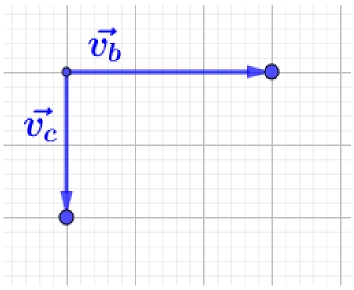


Figura 28

En este caso las direcciones no son paralelas. Cada segundo, el bote avanza 3 m hacia la orilla opuesta y es arrastrado 2 m por la corriente del agua, de manera que avanza en una nueva dirección $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}$, diferente a la del bote y la corriente (ver Figura 29).

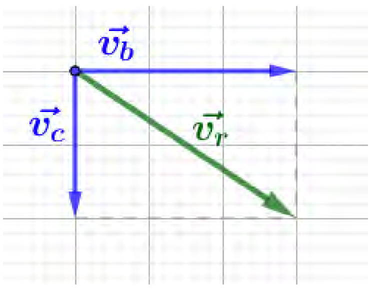


Figura 29

Podemos observar que $\vec{v}_r$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Entonces para obtener la resultante, en este caso, debemos aplicar el Teorema de Pitágoras:

$$\vec{v}_r = \sqrt{(3\,m/s)^2 + (2\,m/s)^2} = \boxed{\mathbf{3,6\,m/s}}$$

Para sumar dos o más vectores gráficamente puede usarse el *método del paralelogramo* (Figura 29) que consiste en acomodar los dos vectores de manera tal que coincida el origen de estos y trazar a continuación la recta paralela a cada vector, que pasa por los extremos del otro. El punto de intersección de estas dos rectas será el extremo del vector suma.
Otro método muy utilizado es el *método de la poligonal* (Figura 30).

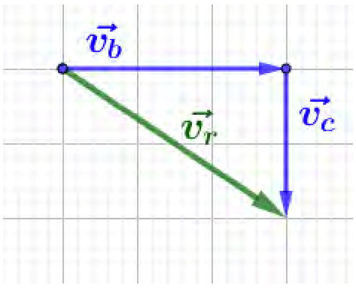


Figura 30

Consiste en representar sucesivamente los vectores, uno a continuación del otro, de manera que el extremo de uno coincida con el origen del próximo. El vector suma se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo del último.

2.8.2. Vectores en un sistema de ejes coordenados

Si queremos representar un vector de forma adecuada, debemos hacerlo a través de un par de ejes coordenados.
Por ejemplo, dados los puntos $A(1;1)$ y $B(4;5)$, el vector $\overrightarrow{AB}$ se puede ver representado en la Figura 31.

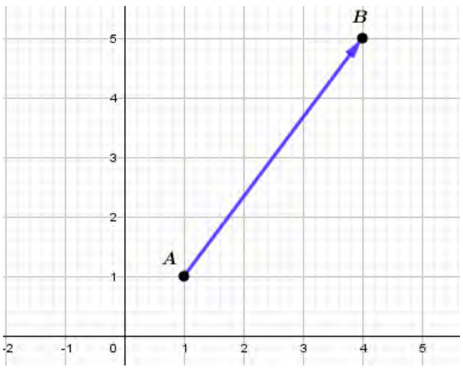


Figura 31

Siempre es posible construir un vector equipolente a $\overrightarrow{AB}$ pero con origen en el origen de coordenadas, es decir, con origen en $(0; 0)$. Dicho vector se obtiene haciendo la resta entre el valor de las coordenadas homólogas de cada punto, en el siguiente orden: extremo menos origen.

$$\vec{\boldsymbol{v}} = (4 - 1; 5 - 1) = (3; 4)$$

El vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ tendrá origen en $(0; 0)$ y extremo en $(3; 4)$. En la Figura 32 vemos representados ambos vectores y observamos que tienen la misma norma, dirección y sentido. Es decir, son equipolentes.

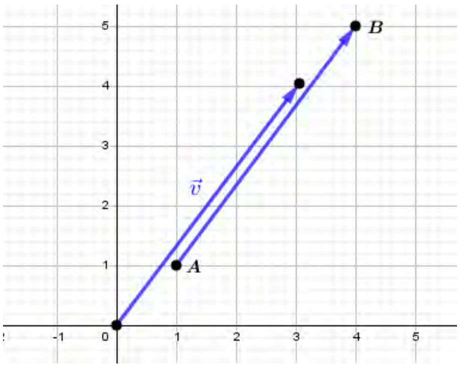


Figura 32

En general si un vector $\overrightarrow{AB}$ tiene origen en un punto de coordenadas $(a; b)$ y extremo en otro punto de coordenadas $(c; d)$, su ***representante canónico*** *está dado por:*

$$\vec{\boldsymbol{v}} = (c - a; d - b)$$

2.8.3. Características de los vectores

Sea $\vec{\boldsymbol{v}} = (a; b)$ un vector genérico del plano, definimos:

- $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^2$, *$\vec{\boldsymbol{v}}$ es un vector del plano cartesiano y sus componentes son número reales: $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$*

- *La* ***norma*** *del vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ que simbolizaremos de aquí en más con $\|\vec{\boldsymbol{v}}\|$ se define,*
$$\|\vec{\boldsymbol{v}}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- *El* ***opuesto*** *del vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ que simbolizaremos de aquí en más con $-\vec{\boldsymbol{v}}$ se define,*
$$-\vec{\boldsymbol{v}} = (-a; -b)$$

- *Si el extremo y origen de un vector coinciden, éste tiene norma cero y carece de dirección y sentido. A dicho vector se lo llama* ***vector nulo*** *que simbolizaremos de aquí en más con* $\vec{\mathbf{0}}$ *. Las componentes de un vector nulo también son nulas,*

$$\vec{\mathbf{0}} = (0; 0)$$

2.8.4. Suma de vectores en sistema de coordenadas

Sean $\vec{u} = (a; b)$ y $\vec{v} = (c; d)$ dos vectores genéricos.

- *La suma entre* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *se define como la suma de sus componentes homólogas.*

$$\vec{u} + \vec{v} = (a + c; b + d)$$

- *La diferencia entre* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *se define como la suma entre el primer vector y el opuesto del segundo.*

$$\vec{u} + (-\vec{v}) = (a - c; b - d)$$

Propiedades de la suma de vectores

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores genéricos del plano.

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	*Propiedad conmutativa*
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$	*Propiedad asociativa*
3. $\vec{u} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{u}$	*Existencia y unicidad del neutro*
4. $\vec{u} + (-\vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\mathbf{0}}$	*Existencia y unicidad del opuesto*

2.8.5. Producto entre un número real y un vector

Dado un vector $\vec{v} \neq \vec{\mathbf{0}}$ si nos piden hallar $\vec{v} + \vec{v}$ es lógico pensar que el vector que obtendremos es un vector que tendrá la misma dirección y sentido que $\vec{v}$ y el doble de norma. De forma análoga si nos piden hallar $\vec{v} + \vec{v} + \vec{v}$ el vector resultante tendrá la misma dirección y sentido que $\vec{v}$ y el triple de norma, como podemos ver ilustrado en la Figura 33.

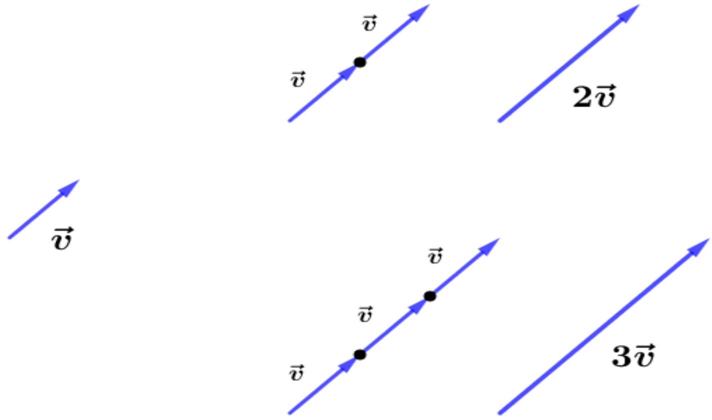


Figura 33

Podemos escribir entonces,

$$\vec{v} + \vec{v} = 2\vec{v}$$

y

$$\vec{v} + \vec{v} + \vec{v} = 3\vec{v}$$

En general, dado un vector $\vec{v}$ no nulo y un número real $k \neq 0$, el producto de k por $\vec{v}$ es un vector con las siguientes características:

- $k\vec{v}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$.
- Si $k > 0$, $k\vec{v}$ tiene el mismo sentido que $\vec{v}$ y su norma es k veces la norma de $\vec{v}$.
- Si $k < 0$, $k\vec{v}$ tiene sentido opuesto al de $\vec{v}$ y su norma es $|k|$ veces la norma de $\vec{v}$.

Sean $\vec{v} = (a; b)$ y $k \in \mathbb{R}$. El producto entre el número real k y el vector $\vec{v}$ se define:

$$k\vec{v} = (k \cdot a; k \cdot b)$$

Propiedades del producto entre un número real y un vector

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ vectores genéricos del plano y k, α números reales.

1. $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
2. $(k + \alpha) \cdot \vec{v} = k\vec{v} + \alpha\vec{v}$
3. $(k \cdot \alpha) \cdot \vec{v} = k \cdot (\alpha\vec{v})$
4. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Ejemplo 8: *Dados los vectores*

$$\vec{u} = (-2; 5) \quad \vec{v} = (-7; -1) \;\; y \;\; \vec{w} = (4; -10)$$

Efectuar las siguientes operaciones:

(a) $\vec{u} + \vec{v}$

Sumando componente a componente,

$$\vec{u} + \vec{v} = (-2; 5) + (-7; -1) = \big(-2 + (-7); 5 + (-1)\big)$$
$$\boxed{\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{-9}; \boldsymbol{4})}$$

(b) $-3\vec{w}$

Teniendo en cuenta la definición del producto entre un número real y un vector, resulta:

$$-3\vec{w} = -3 \cdot (4; -10) = \big((-3) \cdot 4; (-3) \cdot (-10)\big)$$
$$\boxed{\boldsymbol{-3}\vec{\boldsymbol{w}} = (\boldsymbol{-12}; \boldsymbol{30})}$$

(c) $4(\vec{w} + \vec{u})$

Podemos encontrar primero las componentes del vector $\vec{w} + \vec{u}$ y luego, multiplicar el vector resultante por 4.

$$\begin{aligned} 4(\vec{w} + \vec{u}) &= 4 \cdot \big((4; -10) + (-2; 5)\big) = 4 \cdot (4 + (-2); -10 + 5) = \\ &= 4 \cdot (2; -5) = \big(4 \cdot 2; 4 \cdot (-5)\big) \end{aligned}$$
$$\boxed{\boldsymbol{4}(\vec{\boldsymbol{w}} + \vec{\boldsymbol{u}}) = (\boldsymbol{8}; \boldsymbol{-20})}$$

Otra manera es aplicar una de las propiedades enunciadas anteriormente,

$$\begin{aligned} 4(\vec{w} + \vec{u}) &= 4\vec{w} + 4\vec{u} = 4 \cdot (4; -10) + 4 \cdot (-2; 5) = \\ &= \big(4 \cdot 4; 4 \cdot (-10)\big) + (4 \cdot (-2); 4 \cdot 5\,) = \\ &= (16; -40) + (-8; 20) = \\ &= (16 + (-8); -40 + 20) \end{aligned}$$
$$\boxed{\boldsymbol{4}(\vec{\boldsymbol{w}} + \vec{\boldsymbol{u}}) = (\boldsymbol{8}; \boldsymbol{-20})}$$

(d) $\left\| \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} \right\|$

Primer resolvemos la resta de vectores,

$$\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} = (-2;5) - \frac{1}{2}(4;-10) =$$
$$= (-2;5) + \left(\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4; \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-10)\right) =$$
$$= (-2;5) + (-2;5) = (-2 + (-2); 5 + 5) =$$
$$\boxed{\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} = (-4;10)}$$

Ahora calculamos la norma de este nuevo vector, aplicando la definición:

$$\left\| \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} \right\| = \|(-4;10)\| = \sqrt{(-4)^2 + 10^2} = \sqrt{16 + 100}$$
$$\boxed{\left\| \boldsymbol{\vec{v}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\vec{w}} \right\| = \sqrt{\mathbf{116}}}$$

Existen otras formas de referirse a un vector, modos equivalentes a la definición por coordenadas, que pueden resultar más útiles para aplicaciones físicas. Estas formas son las denominadas ***forma polar*** y ***forma canónica*** que abordaremos en la siguiente sección.

2.8.6. Forma polar de un vector

Hasta aquí hemos representado gráficamente un vector $\vec{v}$ a partir de las coordenadas de sus extremos. Sin embargo, ¿podemos representar dicho vector si conocemos sólo su longitud? La respuesta a esta pregunta es no, ya que la información es insuficiente para identificar a qué vector del plano nos referimos. Pensemos que existen infinitos vectores de norma 5, incluso podemos formar una circunferencia con todos ellos, cuyo radio es igual a la norma proporcionada.
Sin embargo, si además de la norma nos dan la información extra de que dicho vector forma con el semieje positivo de x un ángulo de 30°, no hay duda de qué vector es el que nos están indicando (Figura 34).

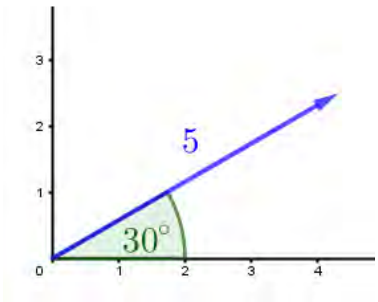


Figura 34

Un vector de norma o módulo 5 que forma un ángulo de 30° con la parte positiva del eje x (horizontal), está expresado en **forma polar** cuando se escribe,

$$\vec{v} = (5; 30°)$$

Nota: recordemos que los ángulos positivos se consideran desde la horizontal en sentido antihorario.

En general, cualquier vector $\vec{v}$ del plano quedará correctamente definido en forma polar a través de la expresión,

$$\vec{v} = (\rho; \theta)$$

Donde,

- ρ es la norma (o módulo) del vector $\vec{v}$.
- θ es el ángulo que forman $\vec{v}$ y el semieje positivo de x (la horizontal).

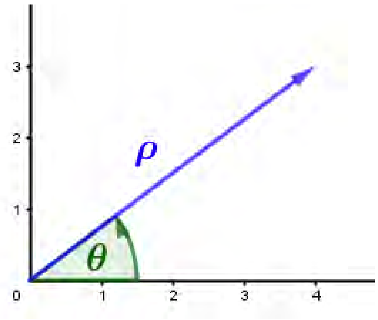


Figura 35

Si tenemos un vector expresando en forma cartesiana $\vec{v} = (a; b)$ y queremos pasarlo a su forma polar, sólo debemos recordar que gráficamente a, b y ρ están relacionados a través de un triángulo rectángulo donde ρ es la hipotenusa y a, b los catetos, entonces:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Para encontrar el ángulo θ conociendo a y b utilizaremos la expresión[5],

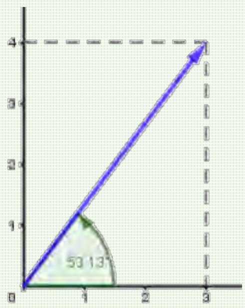
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

ya que b es el lado opuesto y a es el lado adyacente del ángulo θ.

***Ejemplo 9**: Expresar los siguientes vectores en forma, polar.*

(a) $\vec{v}_1 = (3; 4)$

Realicemos, siempre que sea posible, la representación gráfica de los vectores,



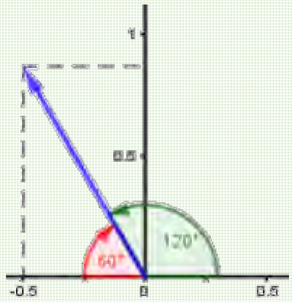
$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53{,}13°$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{5}\,; \mathbf{53{,}13°})}$$

[5] *La justificación de este procedimiento se puede leer en el capítulo 3.*

(b) $\vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 0 = \mathbf{1}$$

$$\theta = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -60° + \mathbf{180°} = 120°$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}; \mathbf{120°})}$$

Nota:

- Para vectores con ángulos en el segundo y tercer cuadrante, al valor del ángulo obtenido por calculadora tenemos que sumarle 180°.
- Para los vectores con ángulos en el cuarto cuadrante, al valor obtenido por calculadora tenemos que sumarle 360°.

2.8.7. Forma canónica de un vector

En el plano hay dos vectores muy particulares denominados **versores canónicos**[6]. Los versores canónicos son vectores unitarios, es decir, tienen **norma uno** y además la dirección y sentido de los semiejes positivos x e y, respectivamente.

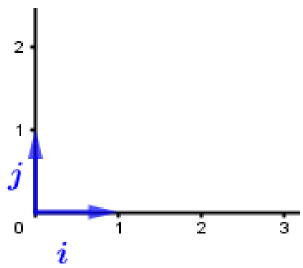


Figura 36

A partir de la representación gráfica, que se observa en la Figura 36, podemos deducir que los versores canónicos tienen entonces las siguientes componentes,

$$\breve{\imath} = (1; 0) \qquad \breve{\jmath} = (0; 1)$$

La importancia de los versores canónicos radica en que, cualquier vector del plano se puede escribir como una combinación lineal de estos dos. Podemos ejemplificar lo que estamos diciendo tomando un vector cualquiera, por ejemplo,

6 También llamados versores fundamentales.

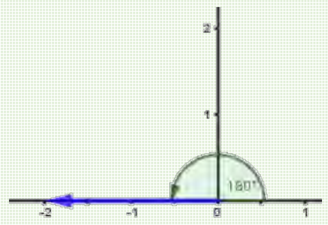
$$\vec{v} = (-7;3) = (-7;0) + (0;3) = -7\underbrace{(\mathbf{1};\mathbf{0})}_{\breve{\imath}} + 3\underbrace{(\mathbf{0};\mathbf{1})}_{\breve{\jmath}} = -7\,\breve{\imath} + 3\breve{\jmath}$$

En general, cualquier vector $\vec{v} = (a;b)$ queda correctamente definido en forma canónica[7] a través de la expresión,

$$\vec{v} = a \cdot \breve{\imath} + b \cdot \breve{\jmath}$$

Ejemplo 10: *Expprese los siguientes vectores en forma cartesiana, polar y canónica, según corresponda:*

(a) $\vec{v} = -2\breve{\imath}$



A forma cartesiana:

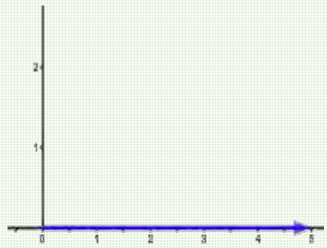
$\vec{v} = -2\breve{\imath} = -2 \cdot \breve{\imath} + 0 \cdot \breve{\jmath} = -2 \cdot (1;0) + 0 \cdot (0;1)$

$\boxed{\vec{v} = (-2;0)}$

A forma polar:

$\boxed{\vec{v} = (2;180°)}$

(b) $\vec{v} = (5;0°)$



A forma cartesiana:

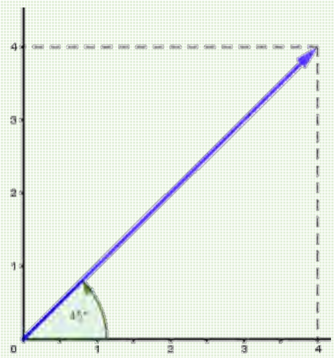
$\boxed{\vec{v} = (5;0)}$

A forma canónica:

$\vec{v} = (5;0) = 5 \cdot (1;0) + 0 \cdot (0;1) = 4\breve{\imath} + 0\breve{\jmath}$

$\boxed{\vec{v} = 4\breve{\imath}}$

(c) $\vec{v} = (4;4)$



A forma canónica:

$\vec{v} = (4;4) = (4;0) + (0;4) = 4 \cdot (1;0) + 4 \cdot (0;1)$

$\boxed{\vec{v} = 4\breve{\imath} + 4\breve{\jmath}}$

A forma polar:

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{4}{4}\right) = \arctan(1) = 45°$

$\boxed{\vec{v} = \left(\sqrt{32}\ ;\ 45°\right)}$

Podemos resumir en el siguiente cuadro todas las expresiones halladas.

---

[7] *También llamada vector en componentes*

Forma Cartesiana	Forma Polar	Forma canónica
$\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{4}; \mathbf{4})$	$\vec{v} = \left(\sqrt{32}; 45°\right)$	$\vec{v} = 4\breve{\imath} + 4\breve{\jmath}$
$\vec{v} = (5; 0)$	$\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{5}; \mathbf{0}°)$	$\vec{v} = 5\breve{\imath}$
$\vec{v} = (-2; 0)$	$\vec{v} = (2; 180°)$	$\vec{\boldsymbol{v}} = -\mathbf{2}\breve{\boldsymbol{\imath}}$

2.9. Aplicaciones físicas: propagación de incertidumbres

Si el valor de una magnitud A se obtiene al realizar operaciones aritméticas con medidas obtenidas de forma directa se dice que el valor de A se obtuvo de manera indirecta.
Por ejemplo, cuando queremos determinar el volumen de un cilindro midiendo su radio y su altura, o el volumen de una esfera midiendo su radio. Las incertidumbres asociadas con las magnitudes medidas directamente se propagan o se transmiten al resultado de la medida final de A afectando de distinta manera a su incertidumbre $\varDelta A$.
El cálculo de la incertidumbre de esa magnitud obtenida de manera indirecta se llama ***propagación de incertidumbres*** y esto se realiza mediante una serie de reglas dependiendo de las operaciones aritméticas que se realicen para calcular A.
Hemos dicho que A depende de otras magnitudes que llamaremos x,y que a su vez tienen incertidumbres $\varDelta x, \varDelta y$ respectivamente. Deseamos encontrar el valor central de la medición de A que llamaremos A_0 y su correspondiente incertidumbre $\varDelta A$ y el intervalo de incertidumbre. Entendiendo que el valor real está comprendido dentro del intervalo $[A_0 - \varDelta A\,; A_0 + \varDelta A]$.
La interpretación es que el valor central de la medida es A_0 y quien hizo las mediciones está razonablemente confiado en que sus mediciones caerán dentro del intervalo anterior.
Si bien vamos a deducir las expresiones de los valores centrales y las respectivas incertidumbres, en los ejercicios sólo aplicaremos los resultados obtenidos.

2.9.1. Propagación de incertidumbres en la suma

Si la magnitud A es el resultado de la suma de dos magnitudes (x e y), tendremos:

$$A = x + y \quad (1)$$

Y como explicamos en el capítulo 1:

$$A_O = \frac{A_M + A_m}{2} \quad (2)$$

y

$$\Delta A = \frac{A_M - A_m}{2} \quad (3)$$

Entonces,

$$A_M = x_M + y_M = x_0 + \Delta x + y_0 + \Delta y \quad (4)$$
$$A_m = x_m + y_m = x_0 - \Delta x + y_0 - \Delta y \quad (5)$$

Reemplazando (4) y (5) en (2) y reagrupando convenientemente se tiene,

$$A_O = \frac{A_M + A_m}{2} = \frac{x_0 + \Delta x + y_0 + \Delta y + x_0 - \Delta x + y_0 - \Delta y}{2} = \frac{2x_0 + 2y_0}{2}$$
$$\boxed{A_0 = x_0 + y_0}$$

Análogamente para (3):

$$\Delta A = \frac{A_M - A_m}{2} = \frac{x_0 + \Delta x + y_0 + \Delta y - (x_0 - \Delta x + y_0 - \Delta y)}{2} = \frac{2\Delta x + 2\Delta y}{2}$$
$$\boxed{\Delta A = \Delta x + \Delta y}$$

Este resultado nos indica que cuando se combinan dos variables mediante una suma, las incertidumbres siempre se suman.

$$\boxed{A_0 = x_0 + y_0} \quad \boxed{\Delta A = \Delta x + \Delta y}$$

Ejemplo 11: *Necesitamos conocer el perímetro de un triángulo isósceles sabiendo que sus lados iguales tienen una longitud de* $10\ cm$ *y su base una longitud de* $8\ cm$*. Ambas medidas fueron tomadas con una regla. Determinar el intervalo de incertidumbre para el valor del perímetro.*

En primer lugar, sabemos que el perímetro de un triángulo es igual a la suma de las medidas de sus lados. En nuestro ejemplo, el valor representativo del perímetro será:

$$P_0 = L_1 + L_2 + L_3 = 10\ cm + 10\ cm + 8\ cm = \mathbf{28\ cm}$$

Además, sabemos que la medición fue tomada con regla, en general, las reglas tienen como menor división al milímetro, por lo que, para la incertidumbre absoluta de la medida de los lados, tomaremos la mitad del valor de la menor división, es decir $0{,}5\ mm$ (medio milímetro).

$$\Delta L = 0{,}5\ mm$$

En este tipo de problemas es necesario trabajar con unidades homogéneas, por lo que convertiremos el valor del perímetro a milímetros:

$$P_0 = 28\ cm \cdot \frac{10mm}{cm} = \mathbf{280\ mm}$$

Como

$$P_0 = L_1 + L_2 + L_3 \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3$$

$$\Delta P = 0{,}5\ mm + 0{,}5\ mm + 0{,}5\ mm = \mathbf{1{,}5\ mm}$$

Por lo que nuestro intervalo de incertidumbre será:

$$P = P_0 \pm \Delta P = \boxed{\mathbf{280\ mm \pm 1{,}5\ mm}}$$

Que también podemos escribir,

$$[280\ mm - 1{,}5\ mm; 280\ mm + 1{,}5\ mm] = \boxed{\mathbf{[178{,}5\ mm; 281{,}5\ mm]}}$$

2.9.2. Propagación de incertidumbres en la resta

Si la magnitud A es el resultado de la resta de dos magnitudes (x e y), tendremos:

$$A = x - y \quad (1)$$

Sabemos que,

$$A_O = \frac{A_M + A_m}{2} \quad (2)$$

y

$$\Delta A = \frac{A_M - A_m}{2} \quad (3)$$

El valor máximo de A se obtendrá al restar el valor mínimo de y al valor máximo de x y no los respectivos valores máximos, entonces nos queda:

$$A_M = x_M - y_m = x_0 + \Delta x - (y_0 - \Delta y) \quad (4)$$
$$A_m = x_m - y_M = x_0 - \Delta x - (y_0 + \Delta y) \quad (5)$$

Reemplazando (4) y (5) en (2) y reagrupando convenientemente se tiene,

$$A_O = \frac{A_M + A_m}{2} = \frac{x_0 + \Delta x - (y_0 - \Delta y) + x_0 - \Delta x - (y_0 + \Delta y)}{2} = \frac{2x_0 - 2y_0}{2}$$

$$\boxed{A_0 = x_0 - y_0}$$

Análogamente para (3):

$$\Delta A = \frac{A_M - A_m}{2} = \frac{x_0 + \Delta x - (y_0 - \Delta y) - [x_0 - \Delta x - (y_0 + \Delta y)]}{2} = \frac{2\Delta x + 2\Delta y}{2}$$

$$\boxed{\Delta A = \Delta x + \Delta y}$$

Este resultado nos indica que cuando se combinan dos variables mediante una resta, las incertidumbres <u>también se suman</u>.

$$\boxed{A_0 = x_0 - y_0}\ \boxed{\Delta A = \Delta x + \Delta y}$$

2.9.3. Propagación de incertidumbres en la multiplicación

Si la magnitud A es el resultado de la multiplicación de dos magnitudes (x e y), tendremos:

$$A = x \cdot y \quad (1)$$

Sabemos que:

$$A_O = \frac{A_M + A_m}{2} \quad (2)$$

y

$$\Delta A = \frac{A_M - A_m}{2} \quad (3)$$

Siendo,

$$A_M = x_M \cdot y_M \;= (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) = x_0\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right) y_0 \left(1 + \frac{\Delta y}{y_0}\right)$$

$$= x_0 y_0 \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0} + \frac{\Delta x}{x_0}\frac{\Delta y}{y_0}\right)$$

$$A_M \cong x_0 y_0 \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0}\right) \quad (4)$$

Se considera que $\frac{\Delta x}{x_0}\frac{\Delta y}{y_0}$ es muy pequeño y despreciable frente a los otros términos. Análogamente,

$$A_m = x_m \cdot y_m = (x_0 - \Delta x)(y_0 - \Delta y) = x_0\left(1 - \frac{\Delta x}{x_0}\right) y_0 \left(1 - \frac{\Delta y}{y_0}\right) =$$

$$= x_0 y_0 \left(1 - \frac{\Delta x}{x_0} - \frac{\Delta t}{y_0} + \frac{\Delta x}{x_0}\frac{\Delta y}{y_0}\right) \cong x_0 y_0 \left(1 - \frac{\Delta x}{x_0} - \frac{\Delta y}{y_0}\right) \quad (5)$$

Trabajando con las expresiones (4) y (5) reemplazadas en (2) y (3) respectivamente,

$$A_O = \frac{A_M + A_m}{2} = \frac{x_0 y_0 \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0}\right) + x_0 y_0 \left(1 - \frac{\Delta x}{x_0} - \frac{\Delta y}{y_0}\right)}{2}$$

$$A_0 = \frac{x_0 y_0 [1 + \frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0} + 1 - \frac{\Delta x}{x_0} - \frac{\Delta y}{y_0}]}{2} = x_0 y_0$$

$$\boxed{A_O = x_0 y_0}$$

$$\Delta A = \frac{A_M - A_m}{2} = \frac{x_0 y_0 \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0}\right) - x_0 y_0 \left(1 - \frac{\Delta x}{x_0} - \frac{\Delta y}{y_0}\right)}{2}$$

$$\Delta A = \frac{x_0 y_0 \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0}\right) - \left(1 - \frac{\Delta x}{x_0} - \frac{\Delta y}{y_0}\right)\right]}{2} = \frac{x_0 y_0 2 \left(\frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0}\right)}{2}$$

Entonces,

$$\boxed{A_0 = x_0 y_0} \quad \boxed{\Delta A = A_0 \left(\frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0}\right) = A_0 \varepsilon A} \quad con\ \varepsilon A = \left(\frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0}\right)$$

Ejemplo 12: *Necesitamos conocer el área de un rectángulo sabiendo que su base tiene una longitud de $20\,mm$ y su altura una longitud de $10\,mm$. Ambas medidas fueron tomadas con regla. Determinar el intervalo de incertidumbre para el valor del área*

Sabemos que el área de un rectángulo es el producto del valor de la medida de su base por el de su altura:

$$A_0 = b_0 \cdot h_0 = 20\,mm \cdot 10\,mm = \mathbf{200\,mm^2}$$

Además, sabemos que la medición fue tomada con regla y, como dijimos anteriormente, las reglas tienen como menor división al milímetro. Finalmente, para la incertidumbre absoluta de la medida de los lados, tomamos la mitad del valor de la menor división, es decir $0{,}5\,mm$.

$$\boxed{\Delta b = \Delta h = 0{,}5\,mm}$$

Cuando tenemos un producto es conveniente realizar la propagación de incertidumbres con las incertidumbres experimentales y luego encontrar la incertidumbre absoluta. Es decir,

$$A_0 = b_0 \cdot h_0 \quad \text{y} \quad \Delta \mathrm{A} = \left(\frac{\Delta b}{b_0} + \frac{\Delta h}{h_0}\right) \cdot A_0$$

$$\Delta A = \left(\frac{0{,}5\,mm}{20\,mm} + \frac{0{,}5\,mm}{10\,mm}\right) \cdot 200\,mm = \mathbf{15\,mm^2}$$

Por lo que nuestro intervalo de incertidumbre nos queda:

$$A = A_0 \pm \Delta A = \boxed{\mathbf{200\,mm^2 \pm 15\,mm^2}}$$

Que también podemos escribir,

$$[200\,mm^2 - 15\,mm^2; 200\,mm^2 + 15\,mm^2] = \boxed{\mathbf{[185\,mm^2; 215\,mm^2]}}$$

2.9.4. Propagación de incertidumbres en la potenciación

Sea la magnitud $A = x^n$. Como la potenciación es una multiplicación de factores iguales, aplicando la regla del producto para n factores iguales nos queda,

$$\boxed{A_0 = x_0^n} \qquad \boxed{\Delta A = x_0^n \cdot n\frac{\Delta x}{x_0} = n x_0^{n-1}\Delta x = x_0^n\ \varepsilon A} \qquad \varepsilon A = n\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)$$

Ejemplo 13: *Determinar el área de un cuadrado sabiendo que sus lados tienen una longitud de 25 mm, medida con regla. Expresar como intervalo de incertidumbre.*

Sabemos que el área de un cuadrado está dada por el cuadrado de la medida de sus lados:

$$A_0 = {L_0}^2 = (25\,mm)^2 = \mathbf{625\,mm^2}$$

Como la medición fue tomada con regla,

$$\boxed{\Delta b = \Delta h = 0{,}5\,mm}$$

La incertidumbre resultante para el área será:

$$\Delta A = \Delta\left({L_0}^2\right) = 2 \cdot {L_0}^1 \cdot \Delta L = 2 \cdot 25 \cdot 0{,}5\,mm^2 = \mathbf{25\,mm^2}$$

Por lo que nuestro intervalo de incertidumbre queda:

$$A = A_0 \pm\ \Delta A = \boxed{\mathbf{625\,mm^2 \pm 25\,mm^2}}$$

Que también podemos escribir,

$$[625\,mm^2 - 25\,mm^2; 625\,mm^2 + 25\,mm^2] = \boxed{[\mathbf{600\,mm^2}; \mathbf{650\,mm^2}]}$$

2.9.5. Propagación de incertidumbres en la división

Si la magnitud A surge de operar otras dos magnitudes (x e y), siendo esta operación una división, será:

$$A = \frac{x}{y}$$

$$A_0 = \frac{A_M + A_m}{2} \quad (2) \Delta Q = \frac{A_M - A_m}{2} \quad (3)$$

Con,

$$A_M = \frac{x_M}{y_m} \quad (4) \; A_m = \frac{x_m}{y_M} \quad (5)$$

se llega a:

$$\boxed{A_0 = \frac{x_0}{y_0}} \quad y \quad \boxed{\Delta A = A_0 \cdot \varepsilon A} \quad con\ \varepsilon A = \left(\frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0}\right)$$

Ejemplo 14: *¿Cuál es el volumen de líquido que entra en un recipiente cilíndrico de diámetro* $15{,}0\,cm$ *y altura* $60{,}0\,cm$*, si todas las medidas se tomaron con una incertidumbre de* $0{,}1\,cm$*?*

Simbolizaremos con D al diámetro y con h a la altura.
Sabemos además que,

$$D = D_0 \pm \Delta D$$
$$h = h_0 \pm \Delta h$$

Para la magnitud que abordaremos en nuestro problema, tenemos que:

$$V_0 = \pi \cdot \left(\frac{D_0}{2}\right)^2 \cdot h_0$$
$$\boxed{V_0 = \frac{\pi}{4} \cdot {D_0}^2 \cdot h_0}$$

Como π es un valor conocido, no un valor medido, del que podemos tomar tantas cifras decimales como sea conveniente para hacer que su incertidumbre experimental y relativa sea despreciable frente a otras. Podemos tomar, por ejemplo, $\pi = 3{,}1416$ y al remplazar en la última expresión obtenida:

$$V_0 = \frac{3{,}1416}{4} \cdot (15{,}0\ cm)^2 \cdot 60{,}0\ cm = 10602{,}9\ cm^2$$

Si

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot h \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon V = \varepsilon \frac{\pi}{4} + \varepsilon D^2 + \varepsilon h$$

entonces,

$$\varepsilon V = \varepsilon D^2 + \varepsilon h \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon V = 2 \cdot \varepsilon D + \varepsilon h$$

y finalmente

$$\boxed{\varepsilon V = 2 \cdot \frac{\Delta D}{D_0} + \frac{\Delta h}{h_0}}$$

Sustituyendo por los datos del problema,

$$\varepsilon V = 2 \cdot \frac{0{,}1\ cm}{15\ cm} + \frac{0{,}1\ cm}{60\ cm}$$

Además,

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 2 \cdot \frac{\Delta D}{D_0} + \frac{\Delta h}{h_0} \quad \Longrightarrow \quad \Delta V = \left(2 \cdot \frac{\Delta D}{D_0} + \frac{\Delta h}{h_0}\right) \cdot V_0$$

y finalmente,

$$\boxed{\Delta V = \left(2 \cdot \frac{\Delta D}{D_0} + \frac{\Delta h}{h_0}\right) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D_0^2 \cdot h_0}$$

Con lo cual podemos dejar expresada a la incertidumbre absoluta en función de los datos:

$$\Delta V = 0{,}015 \cdot\ 10602{,}9\ cm^{\ 3} = \mathbf{15{,}9\ cm^{\ 3}}$$

La incertidumbre relativa porcentual sería,

$$\boxed{\varepsilon V\ \% = \left(2 \cdot \frac{\Delta D}{D_0} + \frac{\Delta h}{h_0}\right) \cdot 100\ \%}$$

$$\varepsilon V\ \% = 0{,}015\ \cdot 100\ \% = \boxed{\mathbf{1{,}5}\ \%}$$

Por lo que el intervalo de incertidumbre quedará expresado como:

$$V = V_0 \pm\ \Delta V = \boxed{\mathbf{10602{,}9\ cm^{\ 3} \pm 15{,}9\ cm^{\ 3}}}$$

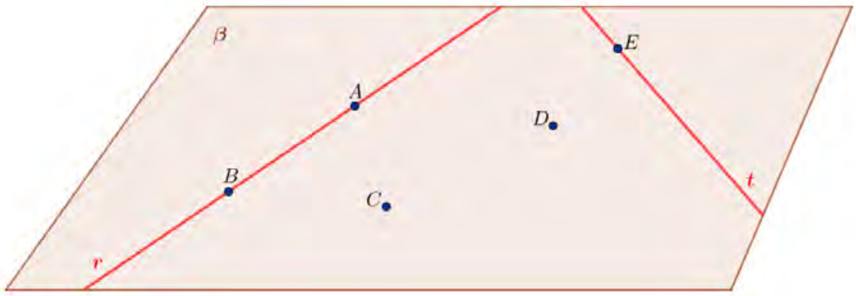
Que también podemos escribir,

$$[10602{,}9\ cm^{\ 3} - 15{,}9\ cm^{\ 3}; 10602{,}9\ cm^{\ 3} + 15{,}9\ cm^{\ 3}] =$$

$$= \boxed{[\mathbf{10587{,}0\ mm^3}; \mathbf{10617{,}2\ mm^3}]}$$

2.10. Actividades del capítulo

1. Observar el siguiente esquema y completar con $\in, \notin, \subset$ según corresponda

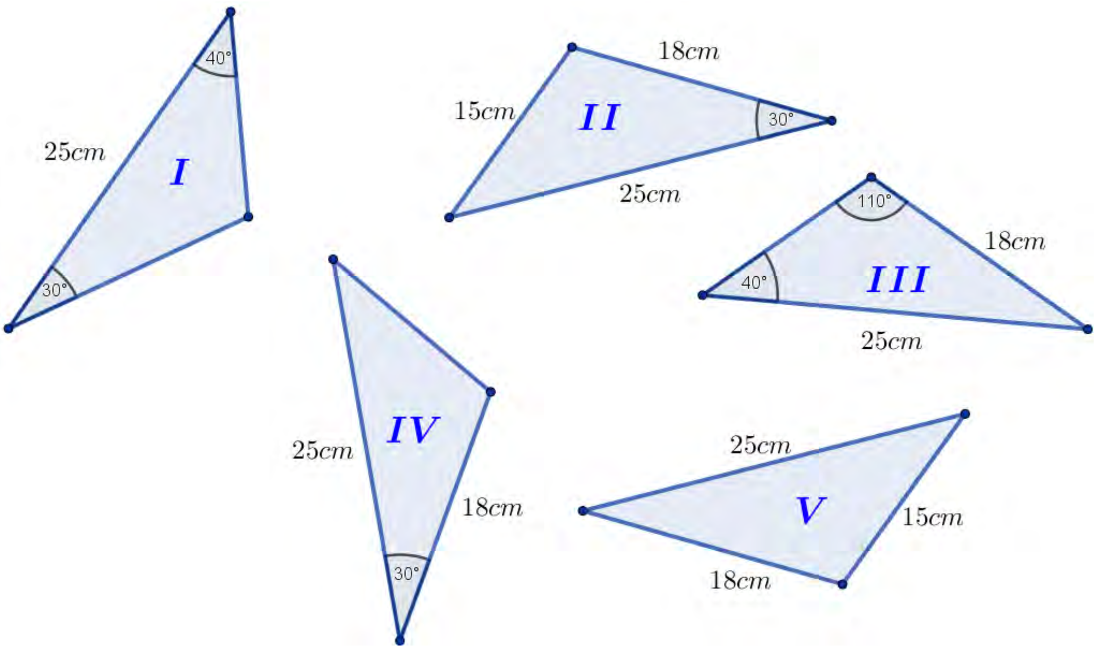


$A\ldots\ldots r$	$D\ldots\ldots. t$
$D\ldots\ldots\beta$	$C\ldots\ldots\beta$
$r\ldots\ldots\beta$	$B\ldots\ldots r$
$E\ldots\ldots r$	$B\ldots\ldots\beta$

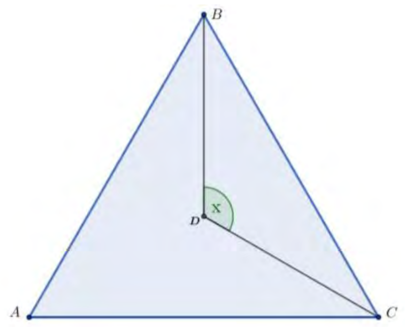
2. Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C y D

Calcular $\overline{BC}$; si $\overline{AD} = 14\ cm$, $\overline{AC} = 11\ cm$ y $\overline{BD} = 10\ cm$

3. Indicar cuáles de los siguientes triángulos son congruentes. Justificar debidamente.



4. Si en un triángulo equilátero el ángulo $\hat{A}$ mide 60°, ¿cuánto mide el ángulo $\hat{X}$ si además sabemos que el punto D es la intersección de las bisectrices de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$?



5. Si en un triángulo la bisectriz exterior de uno de sus ángulos es paralela al lado opuesto, entonces el triángulo es:

   (a) Equilátero (b) Rectángulo

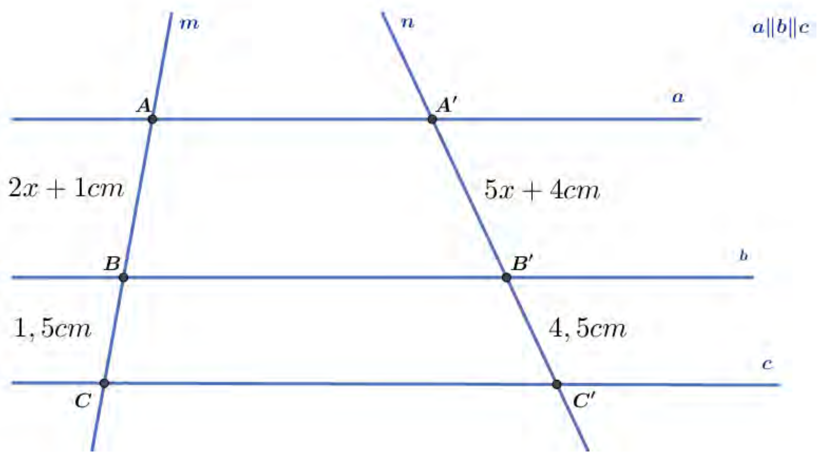
   (c) Isósceles (d) Escaleno

6. Indicar cuántos triángulos ABC no congruentes se pueden construir con los siguientes datos,

$$\overline{AB} = 4{,}7\ cm;\ \widehat{B} = 45°\ y\ \overline{AC} = 3\ cm$$

7. Construir, si es posible, un triángulo isósceles cuyo lado desigual mida $3\ cm$ y la altura relativa a ese lado mida $5\ cm$ ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir con esos datos?

8. A partir de los datos planteados en la siguiente figura:

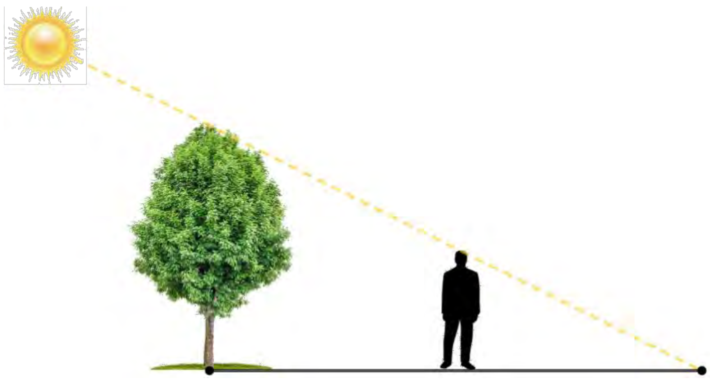


Hallar el valor de x y la longitud de los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}\ \overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$.

9. A la misma hora, las sombras de cuatro postes de luz miden 120 cm, 80 cm, 60 cm y 40 cm respectivamente. Si el poste de luz más pequeño mide 2,2 m, ¿Cuánto miden los demás?

10. En una fotografía, Pablo y Silvana miden 2,5 cm y 2,7 cm, respectivamente. Si la altura real de Silvana es de 170 cm. ¿A qué escala está hecha la foto? ¿Cuál es la altura real de Pablo?

11. Si una persona mide 180 cm y proyecta una sombra de 4 m. Calcular la altura del árbol si en el mismo instante, éste proyecta una sombra de 27 m.



12. Al desplazarnos en automóvil, manejamos 28 km en línea recta hacia el Este. Luego, cambiamos de dirección y manejamos 42 km en línea recta hacia el Norte y nos detenemos.
    (a) Representar la trayectoria y el desplazamiento del automóvil.
    (b) Hallar la distancia a la que se encuentra del punto de partido cuando se detiene.

13. En un rectángulo $ABCD$ se trazan sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, que se cortan en un punto O. ¿Se puede asegurar que los triángulos ABO y DCO son congruentes? ¿Por qué?

14. Calcular la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 5 cm y 8 cm.

15. Determinar el largo de un rectángulo de 10 cm de ancho y 14 cm de diagonal.

16. Si a un rectángulo que tiene una base de 10 cm y una altura de 8 cm, le aumentamos en un 15% su base ¿Cuál es el nuevo perímetro? ¿y el área?

17. Si al mismo rectángulo del ejercicio anterior le disminuimos su altura en un 12% ¿En qué porcentaje disminuye su área?

18. Construir, si es posible, una circunferencia de centro O y marcar sobre ella:
    (a) Dos puntos A y B, de manera que el triángulo AOB sea rectángulo.
    (b) Dos puntos M y N de manera que el triángulo MON sea isósceles.
    (c) Dos puntos S y Q de manera que el triángulo SQO sea equilátero.

19. Halla el diámetro de una circunferencia de 28,5 cm^2 de área.

20. Una zona boscosa tiene forma de trapecio, cuyas bases miden 128 m y 92 m. La anchura de la zona mide 40 m. Se construye un paseo de 4 m de ancho perpendicular a las dos bases. Calcular el área de la zona arbolada que queda.

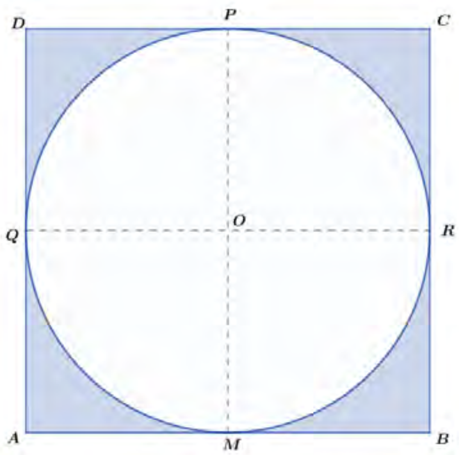
21. Calcular el área y perímetro (en forma exacta) de:
    (a) Un rectángulo de base $\left(6-2\sqrt{3}\right)\,cm$ y altura $\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}+2\right)\ cm.$
    (b) Un rectángulo cuya diagonal mide $\sqrt{15}\,cm$ y su altura $\sqrt{3}\,cm.$
    (c) Un trapecio isósceles cuyas bases miden $\sqrt{18}\,cm$ y $\sqrt{2}\,cm$ y la altura $\sqrt{7}\,cm.$

22. Calcular la altura de un triángulo equilátero de perímetro 48 $cm.$

23. Un cuadrado tiene de área 36 cm^2 ¿Cuánto mide su diagonal? ¿y su perímetro?

24. Si al lado de un cuadrado le aumentamos un 6% su longitud. ¿En qué porcentaje aumenta la medida del perímetro? ¿En qué porcentaje aumenta la medida del área?

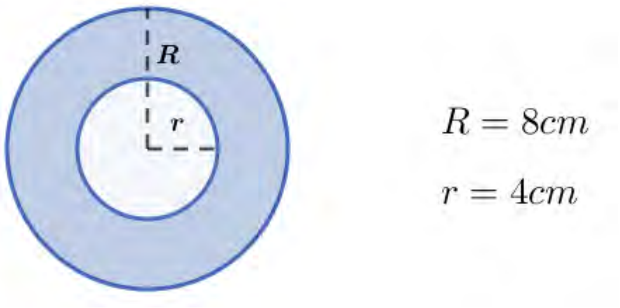
25. Se tiene un cuadrado de 5 cm de lado y una circunferencia inscripta.



Calcular:

(a) La longitud de la circunferencia.
(b) La longitud del arco $MR.$
(c) El área de la región sombreada

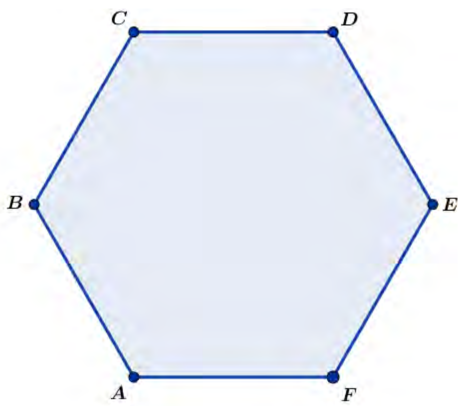
26. Hallar el área de la zona sombreada



27. Representar gráficamente las magnitudes vectoriales de las siguientes situaciones, indicando la escala utilizada.
   (a) Un avión se dirige al Sur a una velocidad de 480 km/h, mientras el viento sopla desde el sudeste a 80 km/h.
   (b) Una persona camina 2,5 km hacia el Este, luego 4 km hacia el noroeste.
   (c) Un bote navega hacia el Norte a una velocidad de 4,5 m/s, en contra de la corriente, que tiene una velocidad de 5,8 m/s.

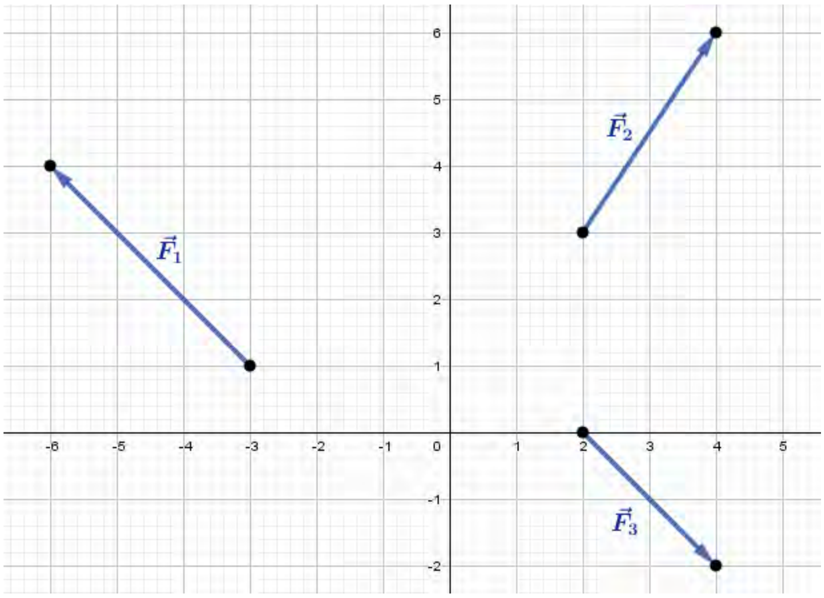
28. Con cuatro intentos, un jugador de golf logra que la pelota entre en el hoyo. El primer golpe desplaza la pelota 5 m hacia el Norte. El segundo golpe desplaza la pelota 1,5 m hacia el Este El tercero 2 m hacia el Sudeste, y el tercero 0,5 m hacia el Sudeste. Graficar los desplazamientos. ¿Cuál sería el desplazamiento adecuado si se quiere meter la pelota en el hoyo con el primer golpe? Graficarlo.

29. Dada la siguiente figura,



utilizar sus vértices para construir vectores, que cumplan las siguientes condiciones:
   (a) Tres vectores que tengan la misma dirección.
   (b) Dos vectores que tengan igual dirección y sentido, pero distinta norma.
   (c) Dos vectores ubicados sobre la misma recta y de igual sentido.
   (d) Dos vectores que tengan igual norma, pero distinta dirección.

30. Dibujar las fuerzas F_1, F_2 y F_3 con origen en $(0;0)$. Luego, dar las coordenadas de los vectores representados.



31. En un sistema de coordenadas cartesianas, graficar los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, donde $A(2;2)$, $B(1;4)$, $C(-1;-2)$ y $D(2;-3)$.
   (a) Se sabe que $\vec{v}$ tiene origen en $(0;0)$ y es equipolente a $\overrightarrow{AB}$. Hallar sus componentes.
   (b) Si $\vec{u}$ es equipolente a $\overrightarrow{CD}$ y tiene origen en $(0;0)$. Hallar sus componentes.
   (c) Si $\overrightarrow{PQ}$ es equipolente a $\overrightarrow{AB}$ y $P(0;3)$, hallar las coordenadas de Q.

32. Calcular gráfica y analíticamente la velocidad resultante:
   (a) Un bote navega a favor de la corriente, con una velocidad de 2,5 m/s. La velocidad de la corriente es de 3,5 m/s.
   (b) Un bote navega en contra de la corriente, con una velocidad de 4,9 m/s. La velocidad de la corriente es de 3 m/s.
   (c) Un bote se utiliza para cruzar el río perpendicularmente a la corriente. Su velocidad es de 4 m/s y la de la corriente de 3 m/s.

33. Dados los vectores $\vec{u} = (-2;3)$, $\vec{v} = (-5;-4)$, $\vec{w} = (5;-1)$ y $\vec{t} = (6;3)$ Hallar y graficar los siguientes vectores:

(a) $\vec{u} + \vec{v} =$	(b) $\vec{w} - \vec{u} =$
(c) $\vec{w} + \vec{t} =$	(d) $\frac{3}{4}\vec{t} =$
(e) $-5\vec{u} =$	(f) $\vec{t} + 4\vec{u} =$

(g) $-4\vec{v} + 2\vec{u} - \vec{w} =$ (h) $3\vec{u} - \frac{5}{2}\vec{u} + 4\vec{t} =$

34. Se necesita cercar un terreno con las siguientes dimensiones:

$$\text{Lado } A = (1000 \pm 10)m; \text{ Lado } B = (500 \pm 5)\ m$$

¿Cuántos metros lineales de cerco se deberán comprar para realizar dicha tarea? Expresar como intervalo de incertidumbre.

35. Para un círculo de radio $r = (21{,}0 \pm 0{,}2)cm$, calcular, para la superficie:
    (a) Valor representativo
    (b) Incertidumbre absoluta.
    (c) Incertidumbre relativa.
    (d) Incertidumbre relativa porcentual.

36. Se miden las dimensiones de un prisma rectangular resultando:
    Lado $A = (10{,}0 \pm 0{,}1)\ cm$, lado $B = (50{,}0 \pm 0{,}5)\ cm$, y $L_0 = 100\ cm$.
    ¿Cuál deberá ser la incertidumbre experimental de L si la incertidumbre experimental del volumen, ΔV, no debe ser mayor a $3500\ cm^3$?

37. ¿Cuál es el volumen total de líquido que entra en dos recipientes, uno de base rectangular de $20{,}0\ cm \times 30{,}0\ cm$ y altura $40{,}0\ cm$ y otro cilíndrico de diámetro $20{,}0\ cm$ y altura $50{,}0\ cm$, si todas las medidas se tomaron con una incertidumbre de $0{,}1\ cm$?

3. Trigonometría y aplicaciones

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es *la medición de los triángulos*. De hecho, “tri” significa tres, “gonos” significa ángulos y “metrón” significa medición o medida. A lo largo de este capítulo estudiaremos las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Estas relaciones, al igual que las funciones trigonométricas que veremos más adelante, son de gran utilidad para modelar fenómenos físicos y resolver problemas de distancias, alturas, etc.
Pero comencemos previamente por revisar algunos conceptos fundamentales.

3.1. Sistema sexagesimal y radial

Si queremos medir la amplitud de un ángulo podemos hacerlo en cualquiera de los dos sistemas más utilizados en la matemática, el *sistema sexagesimal* y el *sistema radial*.

3.1.1. Sistema sexagesimal

En el sistema sexagesimal un ángulo se mide en grados (°) minutos (′) y segundos (″). Un grado resulta de dividir un giro completo en 360 partes iguales. Cada una de esas partes mide 1°, entonces, un giro completo mide 360° y medio giro 180°.
Se cumplen además las siguientes relaciones:

$$1° = 60' \qquad 1' = 60''$$

3.1.2. Sistema radial

En el sistema radial un ángulo se mide en radianes (rad). $1\,rad$ abarca un arco cuya longitud es igual a la del radio de una circunferencia de radio r. Es decir, si tomamos el radio de una circunferencia cualquiera y lo trasladamos sobre un arco de esta, el ángulo que abarca dicho arco medirá $1\,rad$ (Figura 1).

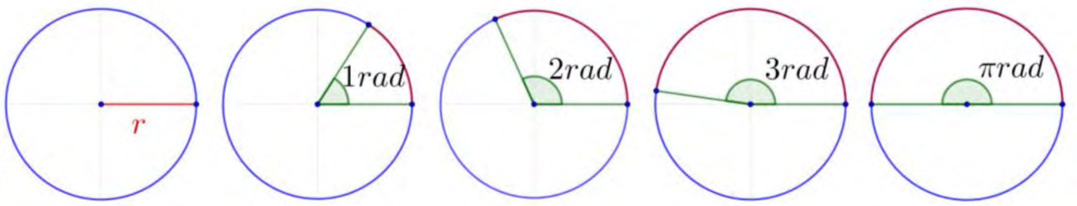


Figura 1

Se puede deducir que,

$$\boxed{180° = \pi\, rad} \quad o \quad \boxed{360° = 2\pi\, rad}$$

Ahora podemos establecer la siguiente relación entre los dos sistemas, para poder pasar de uno a otro,

$$\frac{\alpha(grados)}{180°} = \frac{\alpha(rad)}{\pi\, rad}$$

Ejemplo 1: *Expresar la medida en radianes de un ángulo que en el sistema sexagesimal mide 50°.*

$$\frac{50°}{180°} = \frac{\alpha}{\pi\, rad}$$

Las unidades en grados se cancelan entre sí y el resultado nos quedará en radianes,

$$\alpha = \frac{50}{180} \cdot \pi\, rad$$

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha = \frac{5}{18}\pi\, rad}}$$

Ejemplo 2: *Expresar la medida en grados sexagesimales de un ángulo que en el sistema radial mide* 1,5 *rad.*

$$\frac{\alpha}{180°} = \frac{1{,}5\, rad}{\pi\, rad}$$

Las unidades en radianes se cancelan entre sí y el resultado nos quedará en grados,

$$\alpha = \frac{1{,}5}{\pi} \cdot 180°$$

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha = 85{,}95°}}$$

3.2. Razones trigonométricas

Recordemos del capítulo anterior, que en todo triángulo rectángulo se cumplen las siguientes propiedades:

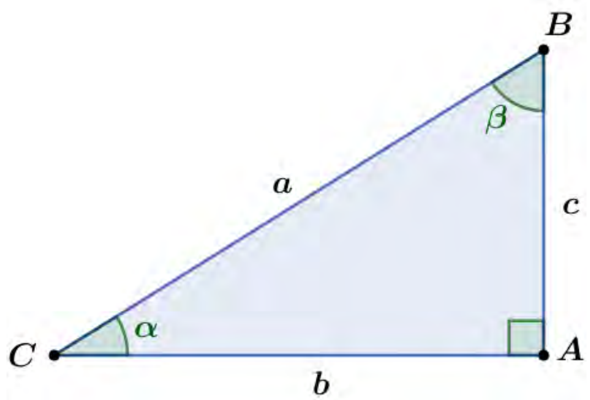


Figura 2

- La suma de los ángulos interiores es igual a 180°. Entonces,

$$\alpha + \beta = 90°$$

- La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.
- La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de su hipotenusa. (Teorema de Pitágoras)

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Sin embargo, en un triángulo rectángulo podemos definir otras relaciones, llamadas ***razones trigonométricas***, que se obtienen a partir del cociente o razón entre dos lados. Estas no dependen del tamaño del triángulo sino de la medida del ángulo asociado. Veamos esta propiedad en el siguiente ejemplo,

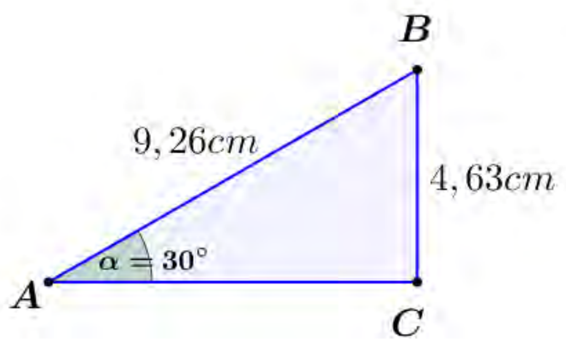


Figura 3

Si efectuamos el cociente entre la longitud del cateto opuesto al ángulo α y la longitud de la hipotenusa obtenemos,

$$\frac{4{,}63\ cm}{9{,}26\ cm} = 0{,}5$$

Al trazar un segmento paralelo al segmento BC (Figura 4), obtenemos otro segmento $B'C'$ y por consiguiente, otro triángulo rectángulo:

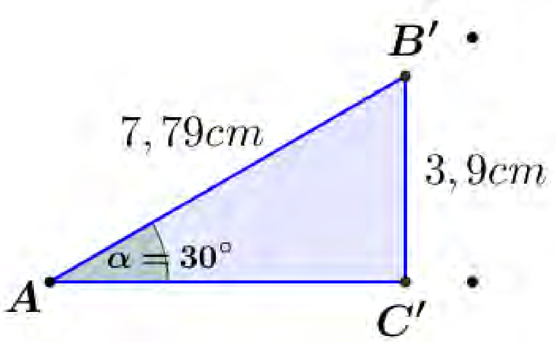


Figura 4

Podemos apreciar que todas las longitudes de los lados se redujeron (sólo los ángulos permanecieron iguales), pero al calcular nuevamente el cociente entre la longitud del cateto opuesto al ángulo α y la longitud de la hipotenusa obtenemos el mismo número,

$$\frac{3{,}9\ cm}{7{,}8\ cm} = 0{,}5$$

Si repetimos el proceso, como podemos observar en la Figura 5,

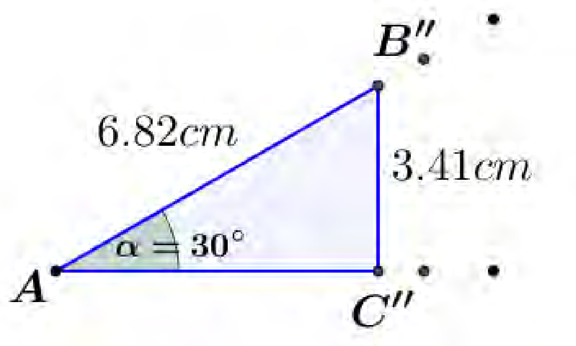


Figura 5

obtenemos otra vez la misma constante.

$$\frac{3{,}41\ cm}{6{,}82\ cm} = 0{,}5$$

Como dijimos anteriormente, las razones o cocientes entre dos lados de un triángulo no dependen del tamaño de este, sino de sus ángulos.
Esto se debe a que los triángulos ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ son semejantes y entonces sus lados resultan proporcionales, es decir,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{AB''}} = constante$$

A esta *constante* se la llama ***seno* de $\boldsymbol{\alpha}$**,

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipontenusa}$$

Si con calculadora queremos hallar el seno de 30°, debemos presionar secuencialmente las teclas:

$$\boxed{\mathbf{sin}}\ \boxed{\mathbf{3}}\boxed{\mathbf{0}}\ \boxed{=}$$

De manera similar podemos plantear cinco cocientes más, entre los lados del triángulo ABC y obtendremos otras constantes que sólo dependen del ángulo α. Es decir, existen en total seis razones trigonométricas:

- *El **seno** de un ángulo es la relación que existe entre la longitud del cateto opuesto y la longitud de la hipotenusa,*

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

- *El **coseno** de un ángulo es la relación que existe entre la longitud del cateto adyacente y la longitud de la hipotenusa,*

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

- La **tangente** de un ángulo es la relación que existe entre la longitud del cateto opuesto y la longitud del cateto adyacente,

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente} = \frac{c}{b}$$

- *La **secante** es la razón trigonométrica recíproca del coseno,*

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{a}{c}$$

- *La **cosecante** es la razón trigonométrica recíproca del seno,*

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{a}{b}$$

- *La **cotangente** es la razón trigonométrica recíproca de la tangente,*

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{c}$$

Haciendo uso de las razones trigonométricas y de las propiedades al inicio enunciadas, podemos resolver diversos problemas que involucran **triángulos rectángulos**.

Cuando hablamos de resolver un triángulo rectángulo nos referimos a encontrar todos sus lados y todos sus ángulos, a partir de ciertos datos conocidos.

Dado un triángulo rectángulo, ¿cuántos datos serán, como mínimo, necesarios para resolverlo?

Relación Pitagórica

Así como las relaciones que existen entre los lados de un triángulo se llaman razones trigonométricas, podemos establecer relaciones entre las razones trigonométricas, llamadas ***identidades trigonométricas***. Estas últimas son de gran utilidad para resolver numerosos problemas y simplificar cálculos. Una de las más importantes es la llamada ***Identidad pitagórica*** o ***Relación pitagórica***.

Si aplicamos el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ABC de la Figura 6,

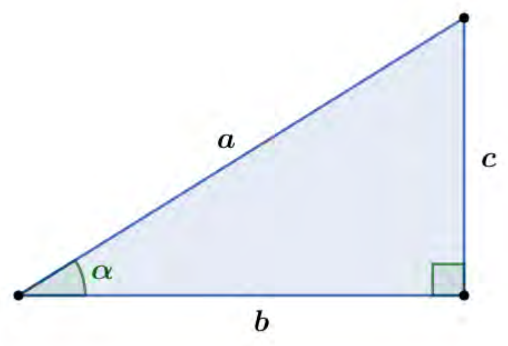


Figura 6

$$b^2 + c^2 = a^2$$

y dividimos por a^2 nos queda,

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

$$\boxed{(\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 = 1}$$

Utilizando el mismo triángulo rectángulo probar que,

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

3.2.1. Razones trigonométricas para ángulos particulares

Haciendo uso de las identidades trigonométricas y de las propiedades de los triángulos rectángulos podemos hallar, sin calculadora, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

- Si $\alpha = 0°$. El cateto opuesto mide cero, es decir $\boldsymbol{c = 0, a = b}$

$$\boxed{\mathbf{sen\,0° = 0\ \ ;\ \ cos\,0° = 1\ \ ;\ \ tan\,0° = 0}}$$

- Si $\alpha = 30°$. A partir del triángulo ABC construimos un triángulo ADC congruente con él, quedando así el triángulo equilátero BCD (Figura 7).

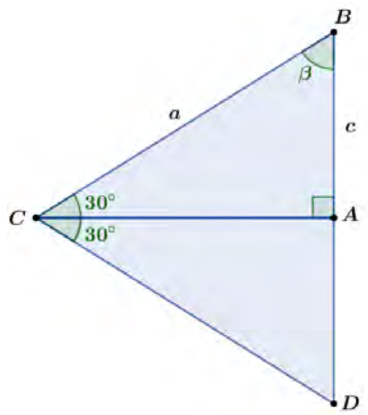


Figura 7

Por ser equilátero sus lados también son iguales, es decir,

$$a = 2c \rightarrow c = \frac{a}{2}$$

entonces,

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

Por la Relación Pitagórica tenemos,

$$(\operatorname{sen} 30°)^2 + (\cos 30°)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\cos 30°)^2 = 1$$

$$(\cos 30°)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Como $\cos 30°$ es un número positivo nos queda,

$$\cos 30° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resumiendo,

$$\boxed{\mathbf{sen\,30°} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \quad ; \quad \mathbf{cos\,30°} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} \quad ; \quad \mathbf{tan\,30°} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}}$$

- Si $\alpha = 60°$. En el triángulo ABC de la Figura 7, como $\alpha = 30°$ resulta que $\beta = 60°$,

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{b}{a} = \cos 30°$$

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y

$$\cos 60° = \frac{c}{a} = \operatorname{sen} 30°$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

En decir,

$$\boxed{\mathbf{sen\,60°} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} \quad ; \quad \mathbf{cos\,60°} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \quad ; \quad \mathbf{tan\,60°} = \sqrt{\mathbf{3}}}$$

- Si $\alpha = 45°$. Podemos construir un triángulo isósceles, como se muestra en la Figura 8, entonces $b = c$.

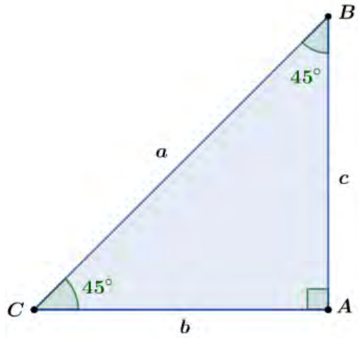


Figura 8

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{c}{a} \quad y \quad \cos 45° = \frac{b}{a} = \frac{c}{a}$$

es decir,

$$\operatorname{sen} 45° = \cos 45°$$

Reemplazando en la relación pitagórica nos queda:

$$(\operatorname{sen} 45°)^2 + (\cos 45°)^2 = 1$$
$$(\operatorname{sen} 45°)^2 + (\operatorname{sen} 45°)^2 = 1$$
$$2(\operatorname{sen} 45°)^2 = 1$$
$$\operatorname{sen} 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resumiendo,

$$\boxed{\mathbf{sen\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad cos\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad tan\,45° = 1}}$$

- Si $\alpha = 90°$

El cateto opuesto mide lo mismo que a, es decir $b = 0, a = c$

$$\boxed{\mathbf{sen\,90° = 1 \quad ; \quad cos\,90° = 0 \quad ; \quad \nexists\, tan\,90°}}$$

Ejemplo 3: *Un faro, ubicado en la playa, tiene una altura de* $675m$. *Desde lo alto del faro y en un ángulo de depresión de* $76°$ *se divisa un barco. ¿A qué distancia de la base del faro se encuentra dicho barco?*

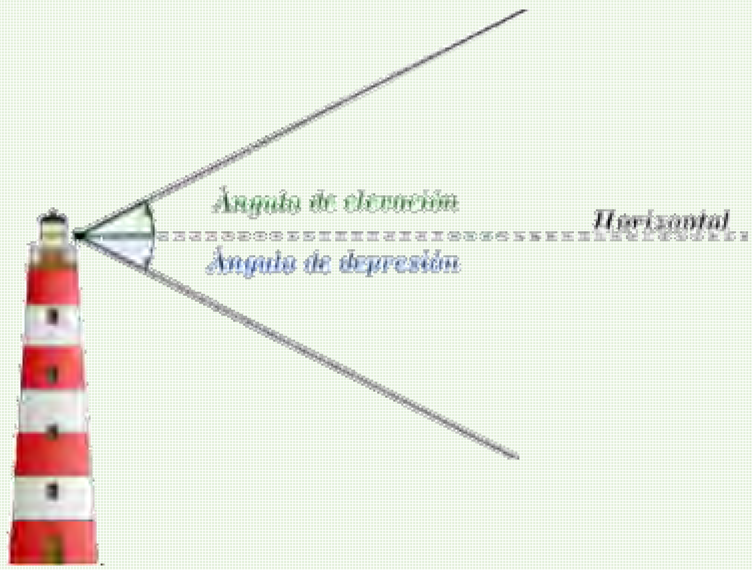
Antes de resolver el problema planteado definamos algunos aspectos que nos serán de utilidad para este y otros problemas que podrían presentarse:

- **Visual** es la línea imaginaria que, partiendo del ojo del observador va hacia el objeto observado.

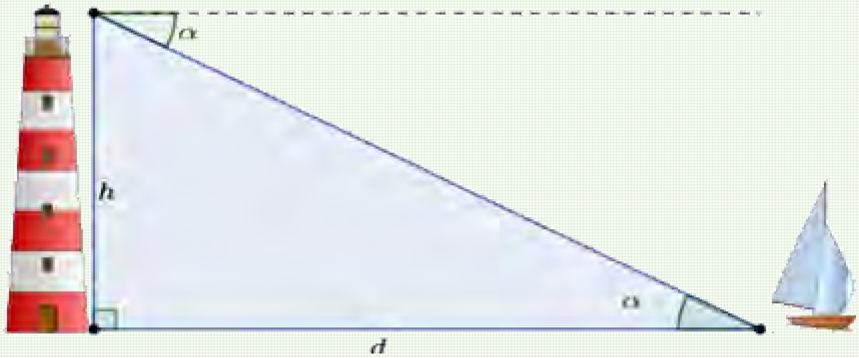
- **Horizontal** es la línea imaginaria que, partiendo del ojo del observador es paralela al horizonte.

- **Ángulo de elevación** es el que forma la horizontal con la visual que se halla por encima de la horizontal.

- **Ángulo de depresión** es el que forma la horizontal con la visual que se halla por debajo de la horizontal.



Realizando las consideraciones adecuadas para nuestro problema y entendiendo al ángulo de depresión como aquel formado por dos líneas imaginarias que parten de la cima del faro, una hacia al barco y la otra paralela al horizonte, podemos esquematizarlo de la siguiente manera,



Por la propiedad de ángulos alternos internos entre paralelas, llamando α al ángulo de depresión, d a la distancia desconocida y h a la altura del faro, podemos representar la situación planteada con los datos e incógnita.
Ahora busquemos una relación entre el ángulo α conocido y dos lados del triángulo. El cateto h es el lado opuesto al ángulo α y el cateto d es el adyacente, entones una de las razones trigonométricas que podemos utilizar es,

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente} = \frac{h}{d}$$

$$\tan 76° = \frac{675\,m}{d}$$

$$d = \frac{675\,m}{\tan 76°}$$

$$d \cong \frac{675\,m}{4{,}01}$$

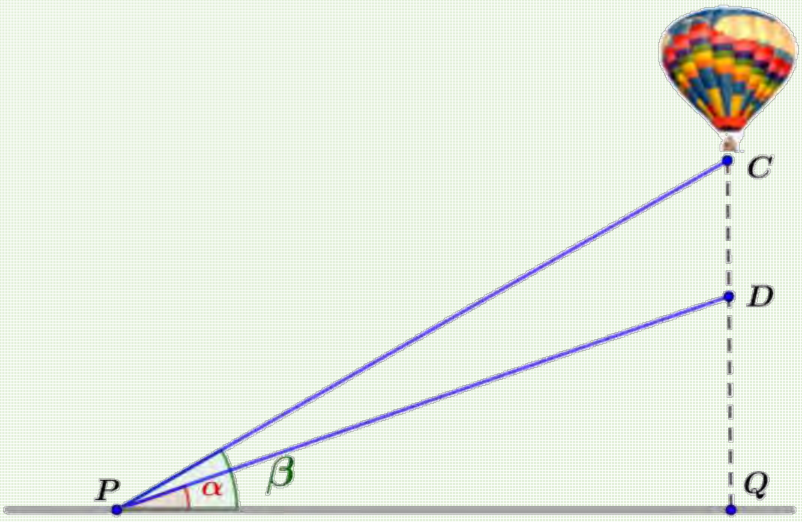
$$\boxed{\boldsymbol{d \cong 168{,}3\ m}}$$

El barco se encuentra aproximadamente a $\mathbf{168{,}3\ m}$ del faro.

¿Qué otra razón trigonométrica podríamos haber utilizado?

Ejemplo 4: *Cuando un globo de aire caliente se eleva verticalmente, su ángulo de elevación desde un punto P en el nivel del suelo a $110m$ del punto Q directamente debajo del globo, cambia de $19°$ a $31°$. ¿Cuánto sube el globo durante ese período?*

Podemos esquematizar la situación, considerando $\alpha = 19°$ y $\beta = 31°$.



Lo que tenemos que averiguar es la medida del segmento $\overline{CD}$ y se puede calcular como la diferencia de dos segmentos $\overline{CD} = \overline{CQ} - \overline{DQ}$. Estos segmentos son los catetos opuestos a los ángulos β y α respectivamente. La distancia, conocida, ente P y Q es la longitud del cateto adyacente, de dichos ángulos. Otra vez, la razón trigonométrica que relaciona los datos e incógnita del problema es la tangente,

$$\tan \alpha = \frac{\overline{DQ}}{110m} \rightarrow \overline{DQ} = 110m \cdot \tan \alpha$$

$$\tan \beta = \frac{\overline{CQ}}{110m} \rightarrow \overline{CQ} = 110m \cdot \tan \beta$$

$$\overline{CD} = \overline{CQ} - \overline{DQ} = 110m \cdot \tan \beta - 110m \cdot \tan \alpha$$

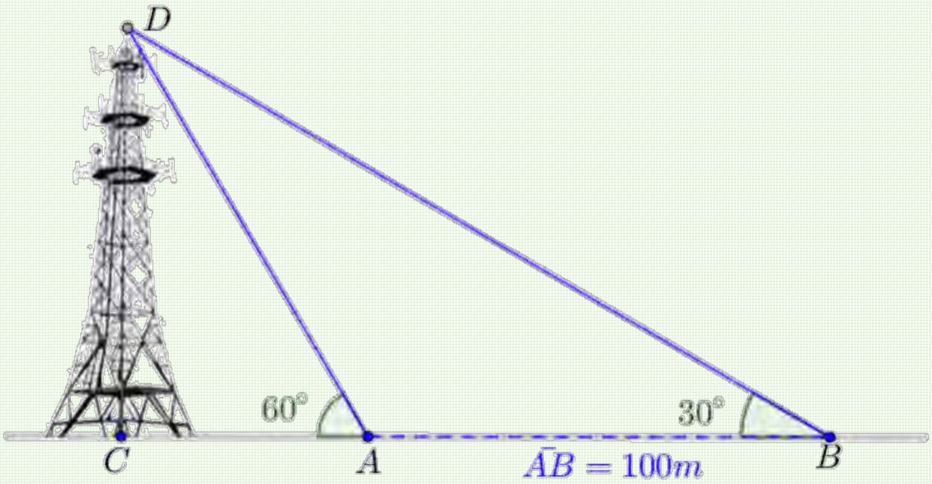
$$\overline{CD} = 110m \cdot \tan 31° - 110m \cdot \tan 19°$$

$$\boxed{\boldsymbol{\overline{CD} = 28,22\ m}}$$

El globo sube aproximadamente $\boldsymbol{28,22\ m}$ durante ese período.

Ejemplo 5: *Hallar la altura de una torre de alta tensión que desde un punto A se ve su extremo con un ángulo de elevación de 60° y desde un punto B, distante 100 m de A, se ve con un ángulo de elevación de 30 °.*

El problema lo podemos esquematizar de la siguiente forma:



Tenemos que averiguar la altura de la torre que está dada por el segmento $\overline{CD}$. Quedan determinados dos triángulos rectángulos con vértice en C, uno de base $\overline{CA}$ y otro de base $\overline{CB} = \overline{CA} + 100\ m$.

$$\tan 60° = \frac{\overline{CD}}{\overline{CA}}$$

$$\overline{CD} = \overline{CA} \cdot \tan 60° = \overline{CA}\,\sqrt{3} \quad (1)$$

Por otro lado,

$$\tan 30° = \frac{\overline{CD}}{\overline{CA} + 100m}$$

$$\overline{CD} = (\overline{CA} + 100m) \cdot \tan 30°$$

$$\overline{CD} = (\overline{CA} + 100m)\,\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2),

$$\overline{CA}\,\sqrt{3} = (\overline{CA} + 100m)\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Agrupando los términos con $\overline{CA}$,

$$\overline{CA}\,\sqrt{3} - \overline{CA}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = 100m\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Despejando $\overline{CA}$,

$$\overline{CA} = \frac{100m\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\overline{CA} = \mathbf{50\ m}}$$

La torre de alta tensión mide aproximadamente $\mathbf{50\ m}$ de alto.

3.3. Teorema del seno y el coseno

Hasta aquí, hemos trabajado con teoremas y relaciones que se dan sólo en triángulos rectángulos. Sin embargo, muchos problemas pueden plantearse a través de la resolución de un triángulo que no es rectángulo. Por eso en esta sección abordaremos dos teoremas que son de gran utilidad para el tipo de situación mencionada. Nos referimos al *teorema del coseno*, que es una generalización del teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos y al *teorema del seno*.

3.3.1. Teorema del seno

Supongamos que una lancha es remolcada por otras dos, tirando cada una con una misma fuerza constante y desconocida, como indica la Figura 9. La resultante de dichas fuerzas es de $2000\,\overrightarrow{kg}$, en la dirección de la lancha remolcada.

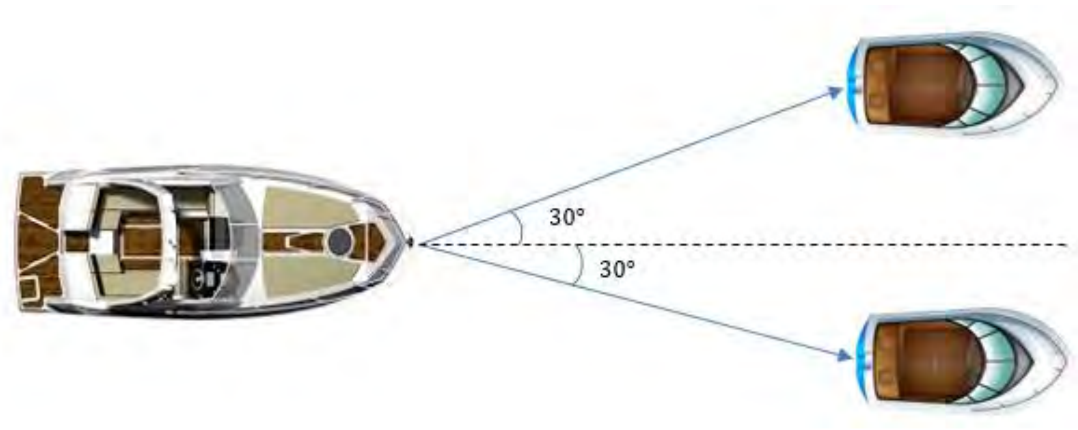


Figura 9

¿Cómo podríamos determinar la fuerza ejercida por cada lancha remolcadora? Sabemos que una fuerza es una magnitud vectorial y como tal se representa a través de vectores. Como explicamos en el capítulo anterior, un vector tiene dirección, sentido y norma. Podemos observar que los vectores que representan las fuerzas de las lanchas remolcadoras tienen distinta dirección, pero la misma norma, ya que ambas lanchas ejercen una misma fuerza constante. Podemos simplificar la situación planteada a través de la Figura 10.

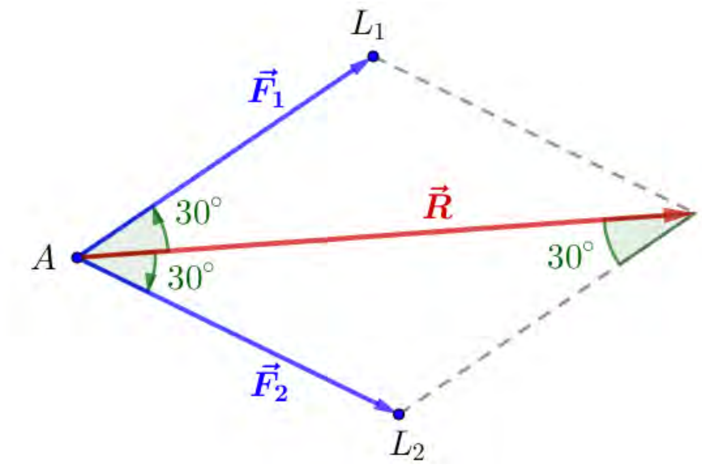


Figura 10

En donde la fuerza resultante divide al paralelogramo en dos triángulos congruentes y la magnitud de las fuerzas que queremos hallar están representadas por otros dos vectores, que son a su vez lados de estos triángulos congruentes. Podemos simplificar aún más el problema, reduciéndolo sólo a un triángulo (Figura 11).

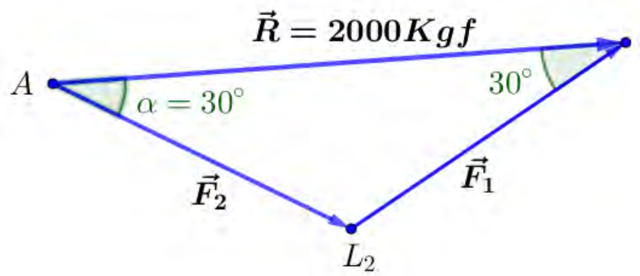


Figura 11

Si trazamos la altura correspondiente al lado de la resultante, nos quedan dos triángulos rectángulos: AML_2 y DML_2 como podemos observar en la Figura 12.

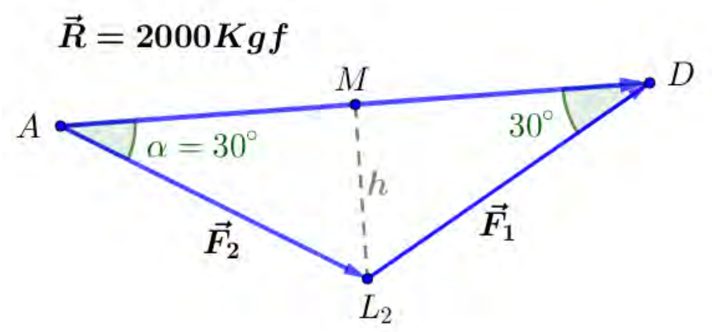


Figura 12

en AML_2,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\|\vec{F}_2\|} \quad (1)$$

en DML_2,

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{\|\vec{F}_1\|} \quad (2)$$

despejando h de (1) y (2) tenemos,

$$h = \|\vec{F}_1\| \cdot \operatorname{sen}\beta = \|\vec{F}_2\| \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

o

$$\frac{\|\vec{F}_1\|}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\|\vec{F}_2\|}{\operatorname{sen}\beta}$$

Repitiendo este procedimiento para las otras alturas llegamos a,

$$\frac{\|\vec{F}_1\|}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\|\vec{F}_2\|}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\|\vec{R}\|}{\operatorname{sen}\theta} \quad (3)$$

Podríamos entonces plantear, para nuestro problema:

$$\frac{\|\vec{F}_1\|}{\operatorname{sen}30°} = \frac{|\vec{R}|}{\operatorname{sen}120°}$$
$$\frac{\|\vec{F}_1\|}{\operatorname{sen}30°} = \frac{2000\,\overrightarrow{Kg}}{\operatorname{sen}120°}$$
$$\|\vec{F}_1\| \cdot \operatorname{sen}120° = 2000\,\overrightarrow{Kg} \cdot \operatorname{sen}30°$$
$$\|\vec{F}_1\| = \frac{2000\,\overrightarrow{Kg} \cdot \operatorname{sen}30°}{\operatorname{sen}120°}$$
$$\boxed{\|\vec{\boldsymbol{F}}_1\| = \|\vec{\boldsymbol{F}}_2\| \cong \mathbf{1154{,}7}\,\overrightarrow{\boldsymbol{Kg}}}$$

La fuerza que ejercen ambas embarcaciones es aproximadamente $\mathbf{1154{,}7}\,\overrightarrow{\boldsymbol{Kg}}$

Este procedimiento que hicimos para resolver el problema se llama **teorema del seno.** Conocer este teorema nos hubiera acortado el camino de resolución del problema ya que lo hubiéramos comenzado en (3)

> ***Teorema del seno**: En todo triángulo el cociente entre cada lado y el seno de su ángulo opuesto es constante.*

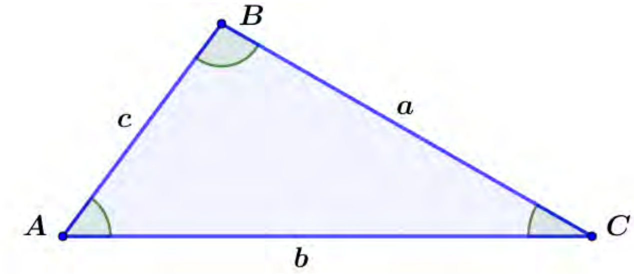


Figura 13

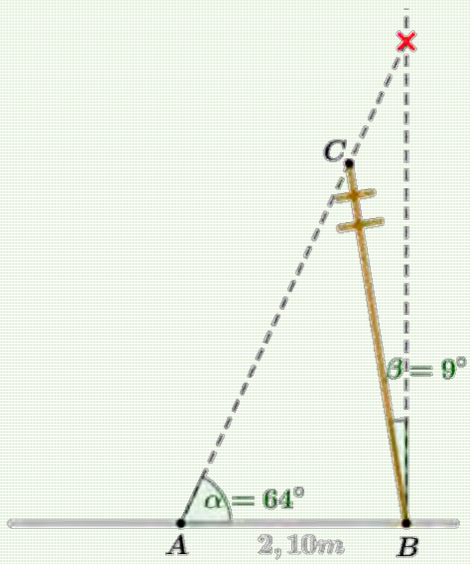
Es decir,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Este teorema es muy útil si conocemos los ángulos interiores de un triángulo y sólo un lado.

***Ejemplo 6:** Cuando el ángulo de elevación del sol es de* $64°$*, un poste de teléfono que está inclinado* $9°$ *respecto de la vertical, proyecta una sombra de* $2{,}10\,m$ *de largo en un terreno nivelado. Calcule la longitud del poste.*

Podemos esquematizar la situación de la siguiente forma, donde el poste está determinado por el segmento $\overline{BC}$,



Los ángulos interiores del triángulo ABC son $\hat{A} = 64°$, $\hat{B} = 81°$ y $\hat{C} = 35°$.
A partir del teorema del seno tenemos,

$$\frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} 64°} = \frac{2{,}10m}{\operatorname{sen} 35°}$$

Despejando,

$$\overline{BC} = \frac{2{,}10m \cdot \operatorname{sen} 64°}{\operatorname{sen} 35°}$$

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{BC}} \cong \mathbf{3{,}30}\ \boldsymbol{m}}$$

Así, el poste de teléfono mide aproximadamente $\mathbf{3{,}30}\ \boldsymbol{m}$ de largo.

3.3.2. Teorema del coseno

Desde un pueblo A y con un ángulo de elevación de 50° se observa un globo aerostático. Mientras que el mismo globo se observa desde otro pueblo B pero con un ángulo de elevación de 30°. Sabiendo que el globo se encuentra a 5 km de distancia del pueblo A y a 6 km del pueblo B (Figura 14), ¿a qué distancia se encuentran los pueblos entre sí?

Figura 14

Nuevamente podemos simplificar la situación planteada a través de un triángulo y trazar una altura correspondiente para tener triángulos rectángulos, como se muestra en la Figura 15.

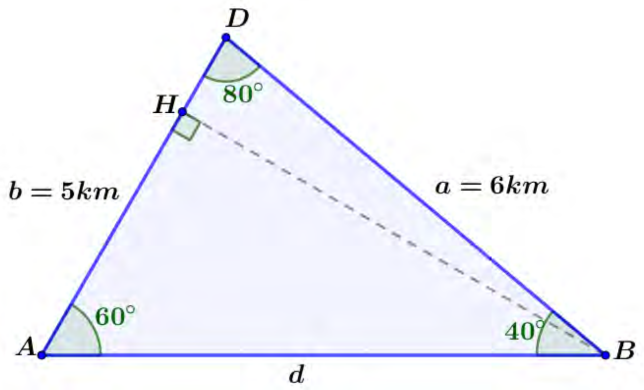


Figura 15

Observando el triángulo rectángulo más pequeño, podemos plantear la siguiente relación,

$$\operatorname{sen} 80° = \frac{h}{a}$$
$$h = a \cdot \operatorname{sen} 80° \quad (1)$$

y además,

$$\cos 80° = \frac{\overline{HD}}{a}$$
$$\overline{HD} = a \cdot \cos 80° \quad (2)$$

Del triángulo rectángulo más grande, aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos,

$$d^2 = (b - \overline{HD})^2 + h^2$$

y desarrollando el cuadrado del binomio,

$$d^2 = b^2 - 2 \cdot \overline{HD} \cdot b + (\overline{HD})^2 + h^2 \quad (3)$$

reemplazando (1) y (2) en (3) nos queda,

$$\begin{aligned} d^2 &= b^2 - 2 \cdot a \cdot \cos 80° \cdot b + (a \cdot \cos 80°)^2 + (a \cdot \operatorname{sen} 80°)^2 \\ d^2 &= b^2 - 2 \cdot a \cdot \cos 80° \cdot b + a^2 \cdot \cos^2 80° + a^2 \cdot \operatorname{sen}^2 80° \\ d^2 &= b^2 - 2 \cdot a \cdot \cos 80° \cdot b + a^2 \cdot \underbrace{(\cos^2 80° + \operatorname{sen}^2 80°)}_{1} \\ d^2 &= b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 80° + a^2 \end{aligned}$$

reacomodando la expresión,

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 80° \quad (4)$$

y sustituyendo,

$$d^2 = (5\ km)^2 + (6\ km)^2 - 2 \cdot 5\ km \cdot 6\ km \cdot \cos 80°$$
$$d^2 = 61\ km^2 - 60\ km^2 \cdot \cos 80°$$
$$d \cong \sqrt{50{,}58\ km^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d \cong 7{,}11\ km}}$$

La distancia a la que se encuentran los pueblos es de aproximadamente de $\boldsymbol{8{,}45\ km}$**.**
Este procedimiento que hicimos para resolver el problema se llama **teorema del coseno** y relaciona un lado de un triángulo cualquiera (Figura 16) con los otros dos y con el coseno del ángulo formado por estos últimos.

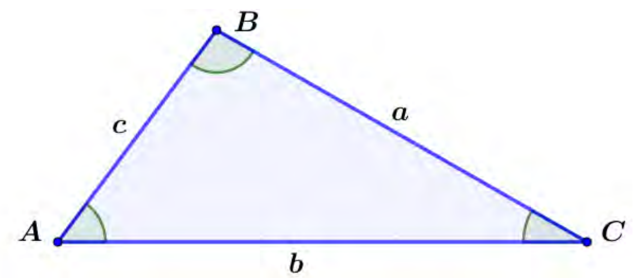


Figura 16

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}}$$

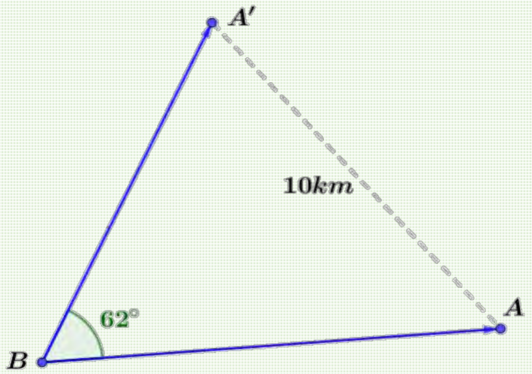
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}}$$

Conocer este teorema nos hubiera acortado el camino de resolución del problema ya que lo hubiéramos comenzado en (4)
Es muy útil cuando conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

¿Por qué el teorema de Pitágoras es un caso particular del teorema del coseno?

Ejemplo 7: *Dos camiones dejan una ciudad al mismo tiempo y viajan por dos carreteras rectas que difieren en dirección en* $62°$*. Si su velocidad es de* $80\,km/h$ *y* $90km/h$*, respectivamente, ¿cuánto tiempo les toma a los camiones separarse* $10\,km$*?*

Podemos esquematizar la situación de la siguiente manera:



Sea t el tiempo en horas después de que los camiones salen de la ciudad que está representada por el punto B, es decir, el segmento opuesto al vértice B es,

$$\overline{AA'} = b = 10\,km$$

Los lados a y c están dados por las distancias recorridas por los camiones en el tiempo t que serán $80t$ y $90t$ respectivamente. Aplicando el teorema del coseno,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$10^2 = (80t)^2 + (90t)^2 - 2 \cdot (80t) \cdot (90t) \cdot \cos 62°$$
$$10^2 = 80^2t^2 + 90^2t^2 - 14400t^2 \cos 62°$$
$$10^2 = (80^2 + 90^2 - 14400 \cos 62°)t^2$$
$$100 = (6400 + 8100 - 14400 \cos 62°)t^2$$

despejando,

$$t^2 = \frac{100km^2}{(14500 - 14400 \cos 62°)km^2/h^2}$$

$$t = \frac{10}{\sqrt{14500 - 14400 \cos 62°}}h$$

$$\boxed{\mathbf{t \cong 0,11367}\boldsymbol{h}}$$

Les toma a los camiones separarse $10\,km$ aproximadamente $6\,min\ 50\,seg$

3.4. Identidades trigonométricas

Las *identidades trigonométricas* son igualdades entre expresiones trigonométricas, que son válidas para todos los valores del ángulo en los que están definidas. A continuación, abarcaremos sólo las más importantes y utilizadas. Consideremos entonces el triángulo rectángulo presentado en la Figura 17,

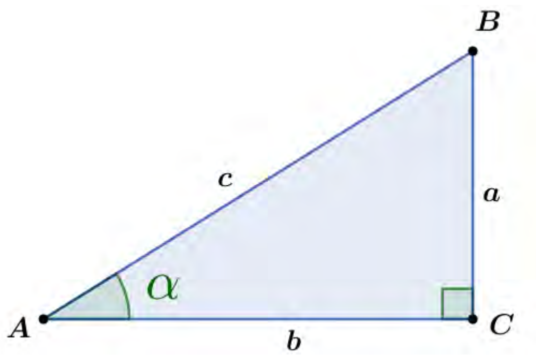


Figura 17

3.4.1. Identidad de la razón

Esta identidad, también llamada identidad de la tangente, establece una relación entre las tres razones trigonométricas. Partiendo del cociente entre el seno y el coseno de un ángulo α, se puede comprobar que dicho cociente coincide con la tangente del mismo ángulo α.

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa}}{\frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \tan\alpha$$

Es decir,

$$\boxed{\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}}$$

3.4.2. Identidad pitagórica

También llamada identidad trigonométrica fundamental, debido a que efectuando sencillas operaciones permite encontrar unas 24 identidades más.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa}\right)^2 + \left(\frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Es decir,

$$\boxed{\mathbf{sen^2}\, \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{cos^2}\, \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}}$$

A partir de aquí si $0 \leq \alpha \leq 180°$

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$
$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

3.4.3. Identidades de la suma o diferencia de dos ángulos

Estas dos identidades nos serán también de gran utilidad. Sin embargo, su demostración no es tan sencilla. Se deja al lector su demostración.

$$\boxed{\mathbf{sen}(\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{sen}\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{cos}\, \boldsymbol{\beta} \pm \mathbf{cos}\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{sen}\, \boldsymbol{\beta}}$$
$$\boxed{\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{cos}\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{cos}\, \boldsymbol{\beta} \mp \mathbf{sen}\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{sen}\, \boldsymbol{\beta}}$$

3.4.4. Identidades del ángulo doble

Partiendo del seno de la suma de dos ángulos,

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

Si $\alpha = \beta$,

$$\operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$\boxed{\mathbf{sen}(\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{2}\, \mathbf{sen}\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{cos}\, \boldsymbol{\alpha}}$$

De forma análoga, si partimos del coseno de la suma de dos ángulos

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

Si $\alpha = \beta$,

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$\boxed{\mathbf{cos}(\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{cos^2}\, \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{sen^2}\, \boldsymbol{\alpha}}$$

3.4.5. Identidades de la mitad de un ángulo

Si $\alpha = \frac{\beta}{2}$ y partimos del coseno del ángulo doble,

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Realizamos luego la sustitución $\alpha = \frac{\beta}{2}$,

$$\cos\left(2 \cdot \frac{\beta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Si hacemos $\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$,

$$\cos(\beta) = 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\beta) = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Despejando,

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\beta)}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\beta)}{2}}}}$$

De forma análoga, para el coseno, resulta:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\cos\left(2 \cdot \frac{\beta}{2}\right) = -\operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\beta) = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$

$$\cos(\beta) = -1 + 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\frac{1 + \cos(\beta)}{2} = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\beta)}{2}}}}$$

Ejemplo 8: *Probar las siguientes identidades trigonométricas:*

1.

$$\boldsymbol{\tan\alpha + \cot\alpha = \sec\alpha\cdot\csc\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$$

Utilizando las identidades de la razón:

$$\tan\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\qquad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$$

Efectuando la suma.

$$\frac{1}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$$

Utilizando la identidad pitagórica.

$$\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=\sec\alpha\cdot\csc\alpha$$

Expresando la fracción de manera equivalente.

$$\boxed{\boldsymbol{\sec\alpha\cdot\csc\alpha=\sec\alpha\cdot\csc\alpha}}$$

Aplicando la definición de secante y cosecante.

2.

$$\boldsymbol{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\csc\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sec\alpha}=1}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\csc\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sec\alpha}=1$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}+\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{\cos\alpha}}=1$$

Utilizando las identidades:

$$\csc\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\qquad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

Efectuando el cociente.

$$\boxed{\mathbf{1=1}}$$

Utilizando la identidad pitagórica.

3.5. Aplicaciones físicas: la Estática

La estática es una rama de la Física que estudia las fuerzas necesarias para mantener un objeto sin acelerarse, es decir, en equilibrio.
En el estudio de un fenómeno físico, es habitual que se presenten situaciones donde tengamos que analizar el comportamiento de varios cuerpos sometidos a múltiples fuerzas, incluidas fuerzas de interacción entre ellos.
Por este motivo será conveniente, muchas veces, estudiar cada cuerpo en forma aislada considerando las fuerzas que actúan sobre el mismo. Esto lo logramos a partir de un diagrama de cuerpo libre (DCL) que se trata de un esquema simplificado del objeto de estudio, con todas las fuerzas que actúan sobre él.
Para simplificar la resolución del problema se recomienda descomponer las fuerzas en otras dos que tengan las direcciones de los ejes de coordenadas x e y, de tal manera que, si en vez de la primera aplicáramos las dos nuevas fuerzas, el efecto sería el mismo.
Cabe ahora preguntarnos, ¿qué fuerzas tenemos que tener en cuenta para construir el diagrama de cuerpo libre? Sólo las fuerzas externas, es decir, las que actúan sobre el objeto, las fuerzas de contacto con otros cuerpos, la de rozamiento, la gravitatoria, etc. pero no debemos incluir las fuerzas que el cuerpo realiza sobre otros cuerpos.

3.5.1. Diagrama de cuerpo libre

Supongamos que una lámpara de 250 g de masa se encuentra suspendida en la esquina de una habitación a través de dos cables, como observamos en la Figura 18.

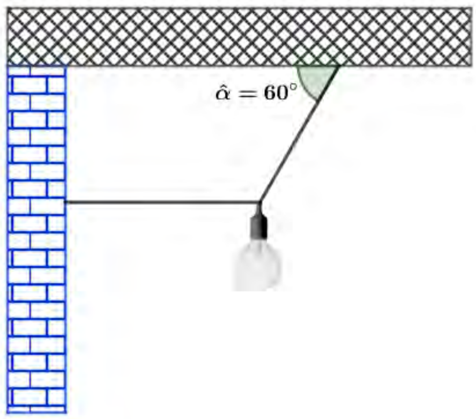


Figura 18

Si deseamos calcular qué fuerza soportará cada cable, comúnmente llamada tensión, debemos recurrir, como hemos dicho anteriormente, a un diagrama de cuerpo libre sobre la lámpara (Figura 18). Para ello, identifiquemos cuáles son las fuerzas actuantes sobre la misma:

- **El peso del objeto**: la fuerza representada por el vector $\vec{W}$. Recordemos que el peso de un cuerpo es igual a la masa de este multiplicada por la gravedad,

$$\boxed{P = m \cdot g}$$

- **La tensión del cable 1**: la fuerza representada por el vector $\vec{T}_1$.
- **La tensión del cable 2**: la fuerza representada por el vector $\vec{T}_2$.

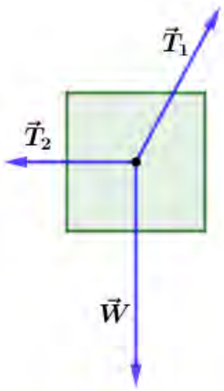


Figura 19

Como consideramos que todas las fuerzas actúan en el mismo plano y con la simplificación de que el objeto es puntual, podemos considerar el problema en forma bidimensional.

Entonces, elegimos un sistema de referencia xy, con un par de ejes perpendiculares y para simplificar aún más nuestro esquema, el punto de origen de todas las fuerzas dadas se colocará en el origen de coordenadas, como lo muestra la Figura 20.

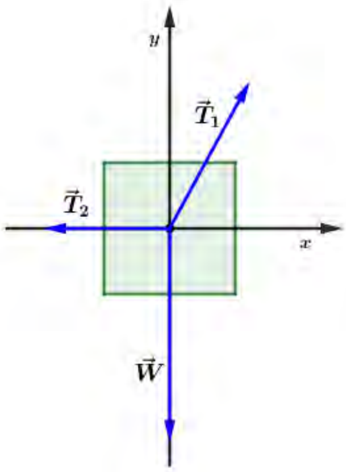


Figura 20

Observemos que en el gráfico tenemos una fuerza que no es paralela a ninguno de los dos ejes. Cada vez que nos encontremos con una situación similar, debemos utilizar un procedimiento que se llama "*descomposición de fuerzas en sus componentes*".

En este procedimiento el dato es la tensión resultante $\vec{T}$ y nos interesa conocer sus componentes en dirección de cada uno de los ejes (horizontal y vertical en este caso), que llamaremos respectivamente $\vec{T}_x$ y $\vec{T}_y$.

En nuestro problema, el vector $\vec{T}_1$ no es paralelo a ninguno de los ejes, de nuestro sistema de referencia. Entonces lo descomponemos en otros dos vectores que sí sean paralelos a los ejes x e y respectivamente y los llamamos $\vec{T}_{1x}$ y $\vec{T}_{1y}$.

En el siguiente esquema, podemos ver representadas las dos fuerzas que en conjunto producen el mismo efecto que la fuerza $\vec{T}_1$ pero con la particularidad de tener, ahora sí, la dirección de los ejes coordenados. Observemos en la Figura 21, además, que los dos nuevos vectores $\vec{T}_{1x}$ y $\vec{T}_{1y}$ sumados entre sí dan como resultante el vector $\vec{T}_1$.

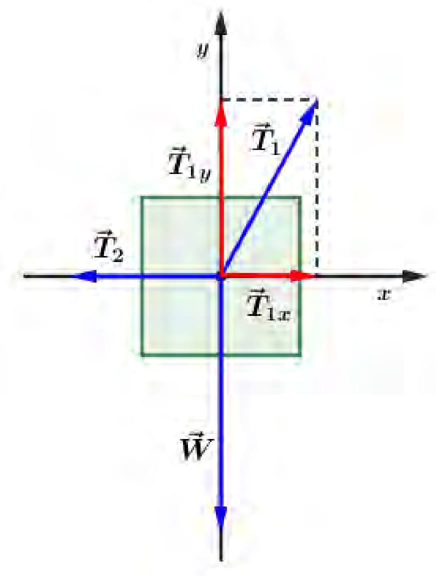


Figura 21

Ahora bien, conocemos la dirección y el sentido de las fuerzas $\vec{T}_{1x}$ y $\vec{T}_{1y}$ pero ¿cuál es la norma o magnitud de estas?

En este punto necesitamos hacer uso de los conocimientos de trigonometría, que hemos visto y para ello podemos construir el triángulo rectángulo mostrado en la Figura 22.

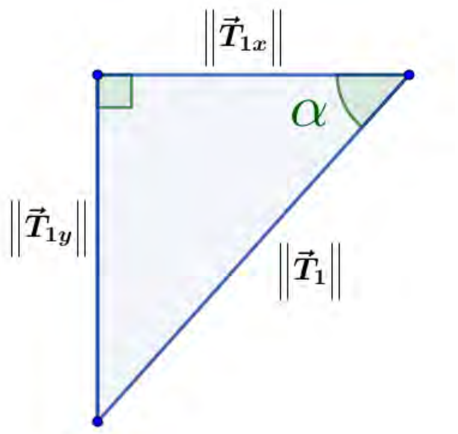


Figura 22

Considerando el ángulo $\hat{\alpha}$, $\|\vec{T}_{1x}\|$ es el cateto adyacente, $\|\vec{T}_{1y}\|$ el cateto opuesto y $\|\vec{T}_1\|$ la hipotenusa. Recordando que,

$$\operatorname{sen}\hat{\alpha} = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{\|\vec{T}_{1y}\|}{\|\vec{T}_1\|} \qquad \cos\hat{\alpha} = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa} = \frac{\|\vec{T}_{1x}\|}{\|\vec{T}_1\|}$$

$$\boxed{\|\vec{T}_{1y}\| = \operatorname{sen}\hat{\alpha}\cdot\|\vec{T}_1\|} \quad \boxed{\|\vec{T}_{1x}\| = \cos\hat{\alpha}\cdot\|\vec{T}_1\|}$$

Como sabemos que el cuerpo se encuentra en equilibrio, las fuerzas respecto de cada eje deberán contrarrestarse. Esto se debe a la **primera ley de Newton** o ley de inercia, que dice que un cuerpo no puede cambiar por sí solo su estado inicial (en este caso reposo), a menos que se aplique una fuerza exterior a este que modifique dicho estado.

Para ello analizaremos las componentes de fuerzas en dirección de cada eje, mediante una suma o sumatoria[8] que deberá darnos cero. Recordemos que las componentes de un vector son números reales, por lo que el análisis en cada dirección será un número real (también llamado escalar).

En el ***eje y***, tenemos,

$$\sum F_y = 0$$

Que se lee: "la sumatoria o suma de todas las componentes en la dirección del ***eje y*** da como resultado cero". Como en la dirección del ***eje y*** sólo tenemos el peso y la componente vertical de la tensión 1, resulta,

[8] *Símbolo de sumatoria $\sum$ también conocido como* ***operación de suma, notación sigma*** *o* ***símbolo suma****, es una notación matemática que permite representar sumas de varios sumandos todos del mismo tipo.*

$$W_y + T_{1y} = 0$$
$$T_{1y} = -W_y \quad (1)$$

W_y es la componente en y del peso $\vec{W}$, que recordemos es igual a la masa multiplicada por el valor de la aceleración de la gravedad, en la superficie de la Tierra. Es decir,

$$P = m \cdot g$$
$$T_{1y} = m \cdot g \quad (1)$$

Recordemos además que,

$$\|\vec{T}_{1y}\| = \operatorname{sen} \hat{\alpha} \cdot \|\vec{T}_1\|$$

Donde $\|\vec{T}_{1y}\|$ coincide en valor y signo con la componente T_{1y} Esto se debe a que la fuerza es paralela al eje y, pero además con sentido positivo. Entonces podemos decir también,

$$T_{1y} = \operatorname{sen} \hat{\alpha} \cdot T_1 \quad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2) y despejando,

$$T_{1=} \frac{mg}{\operatorname{sen} \hat{\alpha}}$$

Reemplazando por los datos de nuestro problema y tomando una aproximación de $g = 9{,}8\, m/s^2$ encontramos la magnitud de la tensión 1,

$$T_1 = \frac{0{,}25\, kg \times 9{,}8 \frac{m}{s^2}}{\operatorname{sen} 60°} \cong 2{,}83\, N$$

Ahora, realizando un procedimiento análogo en el ***eje x***:

$$\sum \boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{0}$$

Que se lee: "*la suma de todas las componentes en la dirección del **eje x** da como resultado cero*". Como en la dirección del eje x tenemos, la componente horizontal de la tensión 2 (la componente vertical vale cero) y la componente horizontal de la tensión 1, resulta,

$$T_{2x} + T_{1x} = 0$$
$$T_{2x} = -T_{1x} \quad (3)$$

Y haciendo un análisis similar al anterior,

$$T_{1x} = \cos\hat{\alpha} \cdot T_1$$
$$T_{1x} = \cos\hat{\alpha} \cdot \frac{mg}{\operatorname{sen}\hat{\alpha}}$$
$$T_{1x} = \frac{mg}{\tan\hat{\alpha}} \quad (4)$$

Sustituyendo la expresión (4) en (3), obtenemos,

$$T_{2\mathrm{x}} = -\frac{mg}{\tan\hat{\alpha}}$$

Finalmente, con los datos de nuestro problema encontramos el valor de la componente en x de la tensión $\overrightarrow{T_2}$:

$$T_{2\mathrm{x}} = -\frac{0{,}25\ kg \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2}}{\tan 60°} \cong -1{,}42\ N$$

Como las componentes del vector son $\overrightarrow{T_2} = (T_{2x}; 0)$ la magnitud de la tensión es el valor absoluto de única componente no nula, entonces,

$$T_2 \cong 1{,}42\ N$$

También podemos expresar vectorialmente el resultado. A través del vector no sólo podemos obtener el valor de la magnitud de la tensión sino además podemos observar el sentido y dirección de esta.

$$\vec{W} = (0; -mg)$$
$$\vec{T}_1 = (T_{1x}; T_{1y}) \rightarrow \vec{T}_1 = \left(\frac{mg}{\tan\hat{\alpha}}; mg\right)$$
$$\vec{T}_2 = (T_{2x}; T_{2y}) = (T_{2x}; 0) \rightarrow \vec{T}_2 = \left(-\frac{mg}{tan\ \hat{\propto}}; 0\right)$$

En el caso que nos sirvió de ejemplo, con $\hat{\alpha} = 60°$, si la lámpara tiene una masa de 250 g (0,25 kg), nos quedaría.

$$\vec{W} = (0; -mg) = \left(0; -0{,}25\ kg \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{W} = (0\ N;\ -2{,}45\ N)}}$$

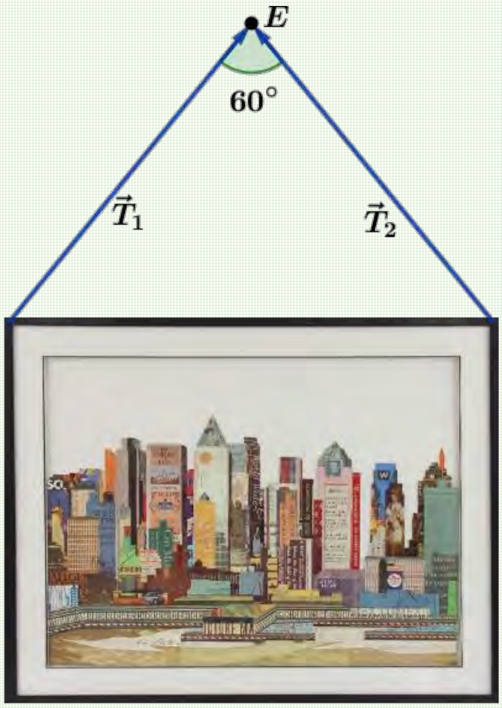
$$\vec{T}_1 = \left(\frac{mg}{\tan\hat{\alpha}}; mg\right) = \left(\frac{0{,}25\ kg \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}}{1{,}73}; 0{,}25\ kg \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}\right)$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{T}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1{,}42}\ \boldsymbol{N}; \mathbf{2{,}45}\ \boldsymbol{N})}$$

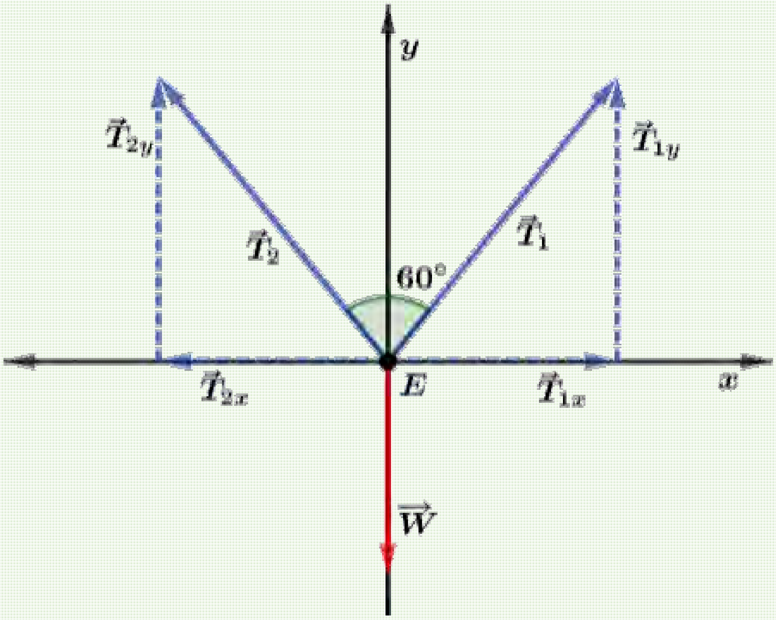
$$\vec{T}_2 = \left(-\frac{mg}{\tan\hat{\alpha}}; 0\right)$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{T}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{-1{,}42}\ \boldsymbol{N}; \mathbf{0}\ \boldsymbol{N})}$$

Ejemplo 9: *Un cuadro de* $30\,N$ *cuelga de un clavo de manera que las cuerdas que lo sostienen forman un ángulo de* $60°$ *¿Cuál es la tensión en cada segmento de la cuerda?*



Trasladamos las fuerzas que representan las tenciones y el peso del cuadro al punto E donde está el clavo y descomponemos cada una de las tensiones.



$$\vec{T}_1 = \left(\|\vec{T}_1\| \cos 60°\,;\, \|\vec{T}_1\| \operatorname{sen} 60°\right)$$
$$\vec{T}_2 = \left(-\|\vec{T}_2\| \cos 60°\,;\, \|\vec{T}_2\| \operatorname{sen} 60°\right)$$
$$\vec{W} = (0;\ -30\ N)$$

Las sumatorias en el ***eje x***,

$$\sum F_x = 0$$
$$\|\vec{T}_1\| \cos 60° - \|\vec{T}_2\| \cos 60° + 0 = 0$$
$$\|\vec{T}_1\| \cos 60° = \|\vec{T}_2\| \cos 60°$$
$$\boxed{\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\|} \quad (1)$$

y en el ***eje y***,

$$\sum F_y = 0$$
$$\|\vec{T}_1\| \operatorname{sen} 60° + \|\vec{T}_2\| \operatorname{sen} 60° - 30\ N = 0$$

Como $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\|$

$$\|\vec{T}_1\| \operatorname{sen} 60° + \|\vec{T}_1\| \operatorname{sen} 60° - 30\ N = 0$$
$$2\|\vec{T}_1\| \operatorname{sen} 60° = 30\ N$$
$$\|\vec{T}_1\| = \frac{30\ N}{2 \operatorname{sen} 60°} = \frac{30\ N}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$\boxed{\|\vec{\boldsymbol{T}}_1\| \cong \mathbf{17{,}32\ \boldsymbol{N}}}$$

La tensión en cada cuerda es de aproximadamente $\mathbf{17{,}32\ \boldsymbol{N}}$

3.5.2. Plano inclinado

Supongamos que tenemos un cuerpo sobre un plano inclinado como el de la Figura 23.

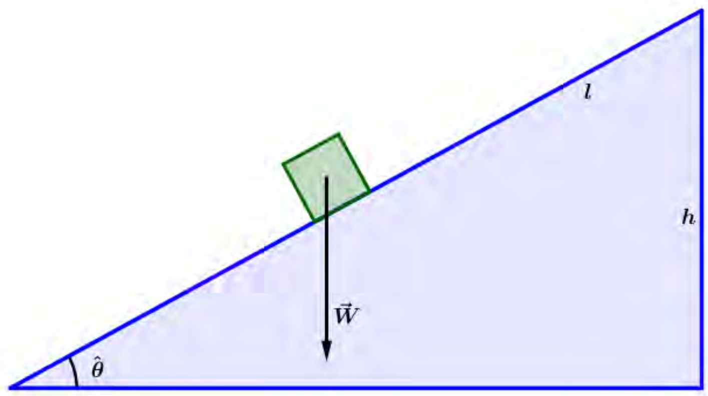


Figura 23

Además, contamos con los siguientes datos:

- El peso del objeto: la fuerza representada por el vector $\vec{W}$.
- La elevación del plano con respecto a la horizontal: el ángulo $\hat{\theta}$
- La altura h.
- La longitud total del plano inclinado (l).

Nos informan que el cuerpo se encuentra en equilibrio, es decir que no se desliza sobre el plano. ¿Cómo puede ser esto? Analicemos la situación con lo aprendido hasta el momento.

En primer lugar, definamos conveniente un sistema de referencia ubicando el origen de coordenadas en el punto de aplicación de $\vec{W}$ y con el eje x paralelo al plano inclinado (Figura 24).

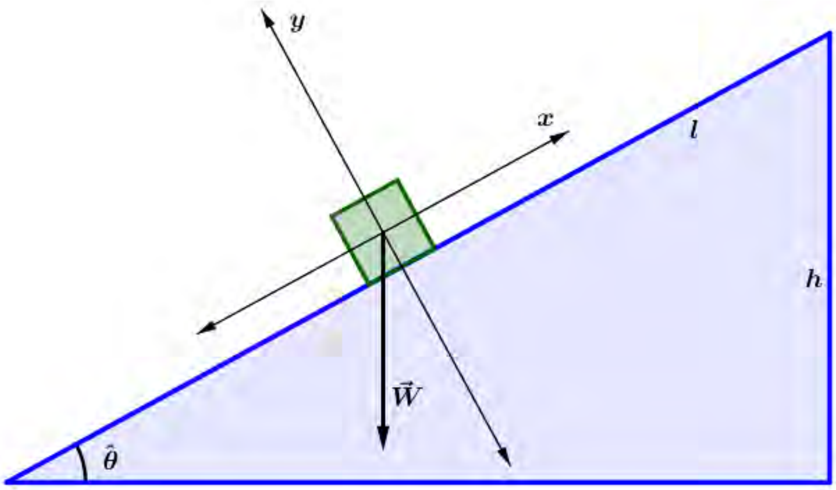


Figura 24

Al descomponer $\vec{W}$ con respecto al sistema de coordenadas $x\,y$, para obtener $\vec{W}_x$ y $\vec{W}_y$,

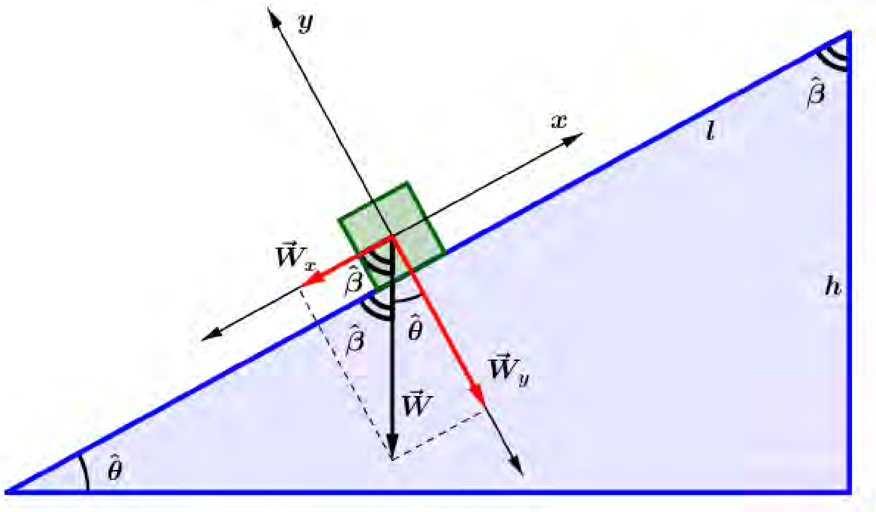


Figura 25

observamos que $\vec{W}$es paralelo al lado h del triángulo, entonces el ángulo que forma con el plano inclinado es $\hat{\beta}$ y el mismo que forma con el *eje* x, por ser correspondientes entre paralelas. Finalmente, el ángulo que forma $\vec{W}$ con el *eje* y es $\hat{\theta}$ por ser complementarios:

$$\hat{\theta} + \hat{\beta} = 90°$$

Como el objeto se encuentra en equilibrio tienen que existir dos fuerzas que contrarresten a $\vec{W}_x$ y a $\vec{W}_y$. En la Figura 26, podemos verlas representadas con dos vectores que tienen la misma dirección y magnitud, pero con sentido contrario, las llamamos $\vec{N}$ y $\vec{F}$, respectivamente.

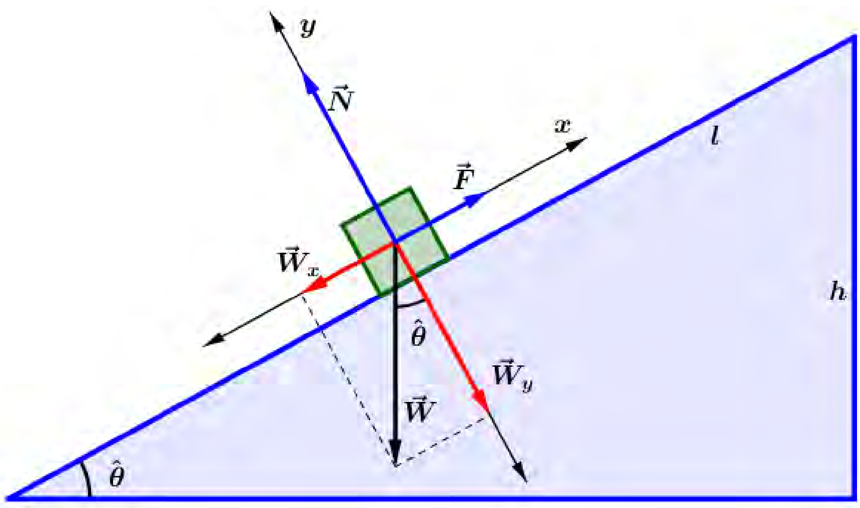


Figura 26

Es decir, la componente $\vec{W_y}$ se encuentra equilibrada por la fuerza $\vec{N}$, producto de la reacción del plano de apoyo sobre el objeto.
Para determinar $\vec{F}$, que se opone a $\vec{W_x}$ y que impide que el cuerpo se deslice debido a la inclinación del plano, debemos realizar un análisis geométrico más detallado.
En primer lugar, observamos que los triángulos que representan al plano inclinado y al formado por $\vec{W}$, $\vec{W_x}$ y $\vec{W_y}$ son semejantes. ¿Qué significan que dos triángulos son semejantes?
Recordemos la definición que se dio de triángulos semejantes en el capítulo 2: *dos triángulos son semejantes si tienen todos sus ángulos correspondientes iguales, por lo que las dimensiones de sus lados resultan proporcionales*.
Consideremos el triángulo que representa al plano inclinado y al formado por $\vec{W}$, $\vec{W_x}$ y $\vec{W_y}$. Estos triángulos son semejantes debido a que tienen sus tres ángulos iguales, ya que tienen θ y un ángulo recto en común. Entonces todos sus lados tienen que ser proporcionales. Podemos definir la siguiente igualdad,

$$\frac{\|\vec{W_x}\|}{h} = \frac{\|\vec{W}\|}{l}$$

Como $\vec{F}$ tienen la misma norma que $\vec{W_x}$, la igualdad la redefinimos como,

$$\frac{\|\vec{F}\|}{h} = \frac{\|\vec{W}\|}{l}$$

Despejando nos queda,

$$\|\vec{F}\| = \|\vec{W}\| \cdot \frac{h}{l} \quad (1)$$

Si observamos el triángulo que representa el plano inclinado notamos que es rectángulo y que se verifica,

$$\operatorname{sen} \hat{\theta} = \frac{Cat.\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{h}{l}$$

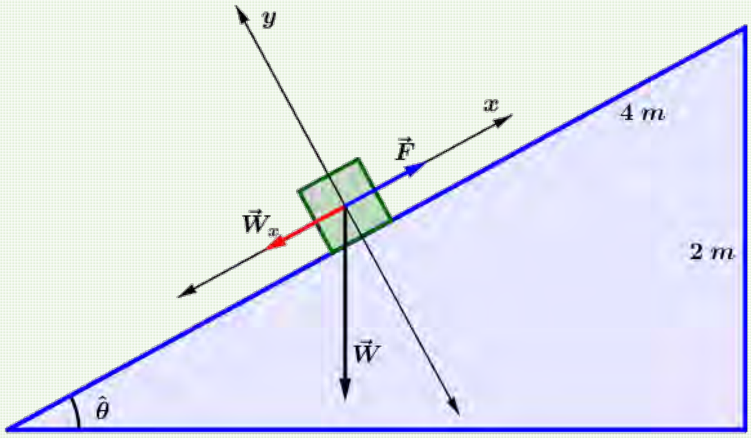
Finalmente, reemplazando en (1) definimos la igualdad,

$$\boxed{\|\vec{F}\| = \|\vec{W}\| \cdot \operatorname{sen} \hat{\theta}}$$

La cual representa una fórmula para encontrar la magnitud de la fuerza necesaria $(\vec{F})$ para mantener en equilibrio un cuerpo, en función de su peso $(\vec{W})$ y el ángulo de inclinación del plano $(\hat{\theta})$.

Ejemplo 10: *Tenemos que subir una caja con botellas de* 90 kg *de masa a una plataforma que se encuentra a 2m del piso. Para ello, empleamos una rampa de* 4m *de longitud ¿Cuál será la fuerza que tenemos que superar para subir la caja por la rampa? ¿Cuál es el porcentaje de fuerza que nos ahorramos por subir la caja?*

Comencemos con definir un esquema de la situación,



Primero, determinamos la magnitud de la fuerza $\vec{W}$. Sabemos que la caja tiene una masa de 90 kg y tomamos una aproximación de la gravedad igual a $-9{,}8\ m/s^2$

$$\|\vec{W}\| = mg = 90\ kg \cdot \left(9{,}8 \frac{m}{s^2}\right)$$

$$\|\vec{W}\| = 882\ kg \frac{m}{s^2}$$

$$\boxed{\|\vec{W}\| = 882\ N}$$

Por otro lado, observamos que no tenemos como dato la amplitud de θ, pero usando trigonometría, podemos calcular

$$\operatorname{sen} \hat{\theta} = \frac{CO}{H} = \frac{2\ m}{4\ m} \rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \hat{\theta} = \frac{1}{2}}$$

Ya podemos utilizar la fórmula para determinar la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ para equilibrar el sistema (la cual tenemos que superar para subir la caja por la rampa)

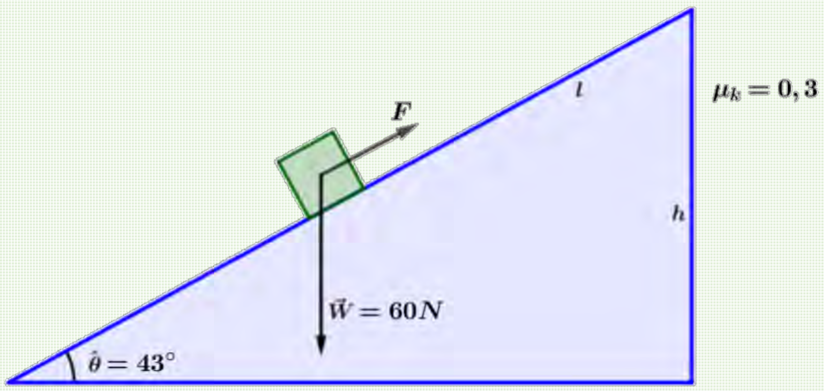
$$\|\vec{F}\| = \|\vec{W}\| \cdot \operatorname{sen} \hat{\theta}$$

$$\|\vec{F}\| = 882\ N \cdot \frac{1}{2}$$

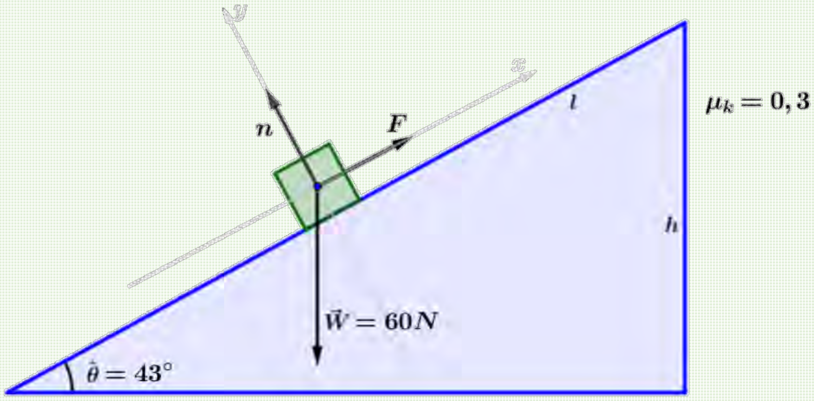
$$\boxed{\|\vec{\boldsymbol{F}}\| = \mathbf{441}\ \boldsymbol{N}}$$

Es decir, para subir la caja con botellas por la rampa es necesario aplicar una fuerza superior a los 441 $Newtons$.
Si quisiéramos elevarla sin la rampa (en forma perpendicular al piso) la fuerza necesaria sería una equivalente al peso del cuerpo o sea 882 N, por lo que, usando la rampa, estaríamos ahorrando un poco menos del 50%
.

Ejemplo 11: *¿Qué fuerza $\vec{F}$ dirigida hacia arriba del plano hará que el bloque de la figura suba por dicho plano con velocidad constante? El coeficiente de fricción cinético μ_k =0,3*



Consideremos un sistema de referencia y descompongamos las fuerzas,



$\vec{F} = (F, 0)$ $\quad \vec{n} = (0, n)$ $\; \vec{f_k} = (-n\,\mu_k, 0)$ $\; \vec{W} = (-60N\ sen43°, -60N cos43°)$

$$\sum F_x = 0 \qquad \mathbf{F} + \mathbf{0} - n\,\mu_k - 60N\ sen43° = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \mathbf{0} + n + 0 - 60N cos43° = 0 \qquad (2)$$

De (2),

$$n = 60N cos43°$$

Reemplazando en (1) y despejando,

$$F = 60N cos43° \mu_k + 60N sen43° =$$

$$F = 60N cos43°0,3 + 60N sen43° \approx \boxed{\mathbf{54,1N}}$$

La fuerza para desplazar el bloque hacia arriba debe ser de aproximadamente $\mathbf{54,1N}$

3.5.3. Momento de una fuerza o torque

Supongamos que debemos aflojar una tuerca, lo primero que se nos viene a la mente es una llave. Conseguimos esa llave, la ajustamos al cuerpo de la tuerca y "hacemos fuerza" desde el extremo para provocar el giro. Supongamos ahora que la tuerca está muy ajustada o tiene demasiado óxido, por más fuerza que hagamos no conseguimos moverla, entonces llamamos al amigo fortachón, probamos con WD40 y nada. Finalmente conseguimos una llave más larga y…¡milagro!, la bendita tuerca comienza a girar. ¿Qué es lo que ocurrió?
La explicación de este fenómeno viene dada por una magnitud física llamada momento o torque de una fuerza.
El momento de una fuerza F respecto de un punto de rotación O, es una magnitud vectorial cuya norma es igual al producto de la norma de la fuerza aplicada a un cuerpo por la distancia más corta medida desde la recta de acción de la fuerza hasta el punto O. Matemáticamente,

$$\|\vec{M}_{F,o}\| = \|\vec{F}\| \, . \, d$$

En nuestra situación (Figura 27) tenemos:

- El punto de rotación O, que es el centro de la tuerca.
- La distancia, que está dada por la longitud de la llave, suponiendo que la sostenemos desde su extremo.
- La fuerza, es la que nuestro brazo ejerce sobre la llave. Si trazáramos una recta longitudinal a nuestro brazo, esa sería la recta de acción de la fuerza.

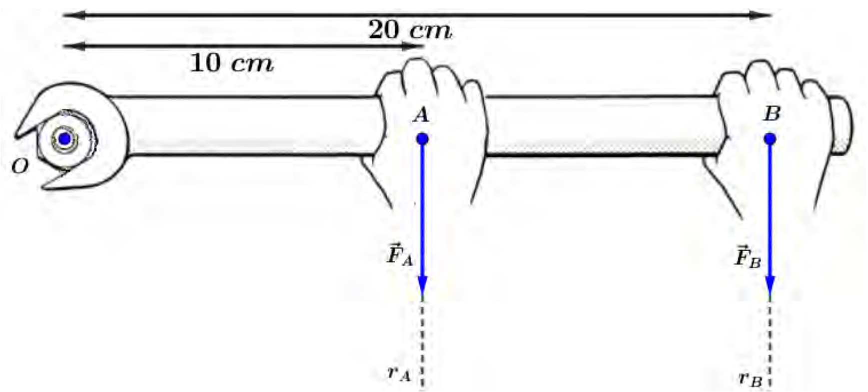


Figura 27

Evidentemente, para poder girar la tuerca se requería de un mayor momento. Podemos observar de la expresión del momento, que éste aumentará proporcionalmente a la norma de la fuerza y a la distancia entre la recta de acción de esta y el centro de la tuerca.

Ni nosotros ni nuestro amigo fortachón fuimos capaces de aplicar una fuerza suficiente para generar el momento necesario para aflojar la tuerca. Así, la única solución posible es aumentar la distancia d, lo cual logramos utilizando una llave más larga que la original.

Para ejemplificar la situación planteada supongamos, a partir de la Figura 27, que tenemos que aflojar la tuerca de centro O, y para ello usaremos el método que se muestra en la figura. En nuestro primer intento ejercemos una fuerza $\vec{F}_A$, cuya recta de acción es r_A y es perpendicular al eje de la llave. La distancia entre el punto A y el punto O es de 10 cm.

A continuación, ejercemos una fuerza $\vec{F}_B$ cuya recta de acción es r_B y es perpendicular al eje de la llave. La distancia entre el punto B y el punto O es de 20 cm. ¿Cuánto mayor será el valor de la norma del momento $\vec{M}_{FB,o}$ respecto del valor de la norma del momento $\vec{M}_{FA,o}$?

Asumiendo que ejercemos la misma fuerza, es decir, que $\vec{F}_A = \vec{F}_B$, y que las rectas de acción de ambas fuerzas son paralelas, la diferencia estará dada por la distancia entre éstas y el centro de la tuerca. Como la distancia entre el punto B y el punto O, es del doble de la existente entre A y O, el valor de la norma de $\vec{M}_{FB,o}$ será exactamente el doble del valor de la norma de $\vec{M}_{FA,o}$.

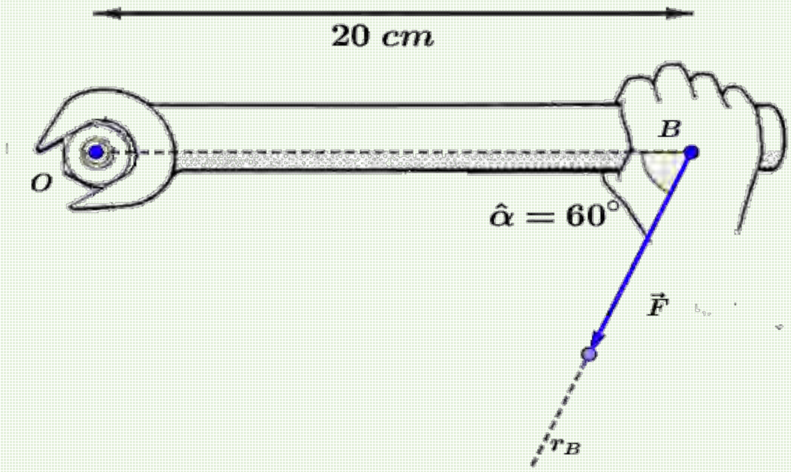
Hasta aquí hemos trabajado con momentos producto de fuerzas perpendiculares a barras rígidas, sobre las que se mide la distancia entre el punto de aplicación de la fuerza y el centro de rotación. Pero no siempre se dará esta situación. Cuando la fuerza aplicada no sea perpendicular al eje de la barra rígida procederemos a realizar el siguiente análisis:

Dado un vector $\vec{r}$ que va desde el centro de rotación O hasta el punto donde se aplica la fuerza y un ángulo $\hat{\alpha}$, que será el menor ángulo entre la recta de acción de la fuerza y la recta de acción de $\vec{r}$. Se define el valor de la norma del momento $\vec{M}_{FA,o}$ como,

$$\|\vec{M}_{F,o}\| = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{r}\| \cdot \operatorname{sen} \hat{\alpha}$$

Se evidencia que el momento será máximo cuando la fuerza sea perpendicular a la barra, y valdrá cero, si la recta de acción de la fuerza y el eje de la barra son coincidentes.

Ejemplo 12: *Supongamos que no podemos sostener la llave en forma perpendicular al eje de la misma, por lo que lo haremos con un ángulo de* 65° *como muestra la siguiente figura:*



¿Cuál deberá ser el valor de la norma de la fuerza $\vec{F}_B$, si quiero que el valor de la norma del momento $\vec{M}_{FB,o}$ sea de $20\ Nm$*?*

Sabemos que,

$$\|\vec{M}_{F,o}\| = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{r}\| \cdot \operatorname{sen} \hat{\alpha}$$

y necesitamos,

$$\|\vec{M}_{F,o}\| = 20\ Nm$$

Tenemos como dato el ángulo $\alpha = 65°$, que en este caso es el menor ángulo entre la recta de acción de la fuerza y el eje de la palanca, por lo que será el que usaremos en la ecuación.
Sólo nos falta conocer $\|\vec{r}\|$ para poder despejar $\|\vec{F}\|$, pero como $\|\vec{r}\|$ no es más que la distancia entre B y O, podemos decir que,

$$\|\vec{r}\| = 0{,}2\ m$$

Por lo que nos queda,

$$\|\vec{M}_{F,o}\| = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{r}\| \cdot \operatorname{sen} \hat{\alpha}$$

$$\|\vec{F}\| = \frac{\|\vec{M}_{F,o}\|}{\|\vec{r}\| \cdot \operatorname{sen} \hat{\alpha}}$$

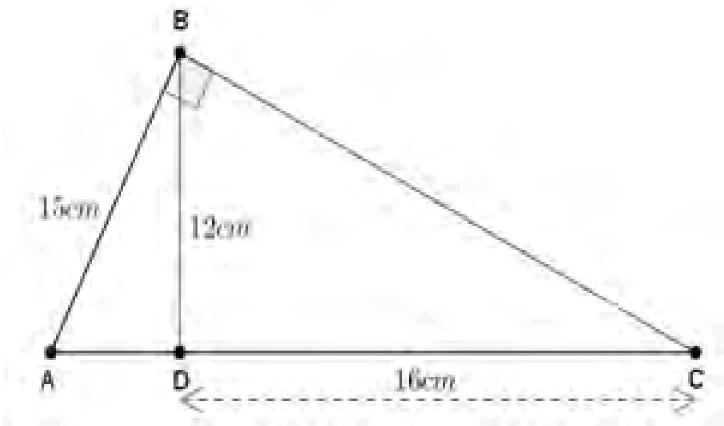
$$\|\vec{F}\| = \frac{20\ Nm}{0{,}2\ m \cdot \operatorname{sen} 65°}$$

$$\|\vec{F}\| \cong \frac{20\ Nm}{0{,}2\ m \cdot 0{,}9}$$

$$\boxed{\|\vec{\boldsymbol{F}}\| \cong \mathbf{111}\ \boldsymbol{N}}$$

3.6. Actividades del capítulo

1. Calcular las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$ del siguiente triángulo y completar la tabla.



x	$\hat{A}$	$\hat{C}$	$\widehat{ABD}$	$\widehat{CBD}$
$\operatorname{sen} x$				
$\cos x$				
$\tan x$				

2. Completar la siguiente tabla, expresando el ángulo en ambos sistemas.

Sistema sexagesimal	Sistema radial
$23°$	
	$3{,}2\ rad$
	$1{,}1\ rad$
$125°\ 10'$	
	$0{,}5\ rad$
	$1{,}5\ rad$
$215°\ 20'15''$	

3. Obtener de forma exacta y completar la siguiente tabla.

α			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	
	$0°$	$30°$			$90°$
sen α					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					

4. Determinar el ángulo de ascenso mínimo necesario para que el avión de la figura pueda despegar sobrevolando la antena.

5. Una persona escala un cerro y al llegar a la cima, se da cuenta de que la altura a la cual se encuentra es la mitad de la distancia recorrida durante el ascenso. Calcular el ángulo de elevación con el cual se observa la cima del cerro, desde la base.

6. Una persona observa un objeto que está en caída libre con un ángulo de elevación de 60°. Transcurrido un momento lo vuelve a observar con un ángulo de elevación de 30°. Si en la primera observación el objeto se encontraba a 60 m de altura, ¿a qué altura se encontraba en la segunda observación?

7. Los brazos de un compás, que miden 15 cm, forman un ángulo de 45°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

8. Un poste se quiebra de forma tal que la parte superior se inclina formando con la parte inferior un ángulo de 65°. Si el extremo superior toca el piso a una distancia de 2,50 m del pie del poste, ¿cuál era la longitud del poste?

9. Calcular la superficie de un campo rectangular sabiendo que un alambre boyero, que lo atraviesa diagonalmente, tiene una longitud de 520 m y forma con uno de sus lados limítrofes un ángulo de 40°.

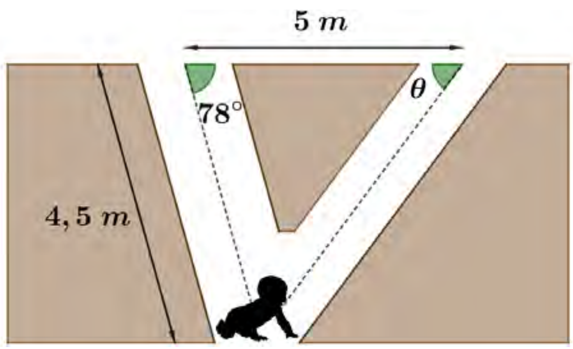
10. En un momento dado, cuando un avión estaba directamente arriba de una carretera que une dos ciudades. Los ángulos de elevación con respecto a estas dos eran 25° y 18°, respetivamente.
    (a) Determinar la distancia del avión a cada una de las ciudades, en dicho instante, sabiendo que la distancia entre las dos es de 10 km.
    (b) Determinar la altura del avión en ese momento.

11. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en los puntos medios respectivamente, una de las diagonales mide 12 cm y la otra mide 5cm y el ángulo que se forma entre ellas es de 48°. Encontrar la medida de los lados del paralelogramo.

12. Dos barcos se dirigen al mismo puerto en línea recta, el ángulo que forman sus trayectorias es de 41°. Si uno de los barcos recorre 13 km antes de llegar al punto y el otro recorre 19 km, ¿a qué distancia se encontraban los barcos inicialmente?

13. Un camino recto forma un ángulo de 18° con la horizontal. Cuando el ángulo de elevación del sol es 49°, un poste vertical al lado del camino proyecta una sombra de 6,4 m de largo. Calcular la longitud del poste.

14. Un niño está atrapado 4,5 m bajo tierra en el tiro de una mina abandonada que se inclina a un ángulo de 78° respecto a la horizontal. Un túnel de rescate se ha de cavar a 5 m desde la abertura del tiro.



(a) ¿A qué ángulo θ debe cavarse el túnel?

(b) Si el túnel se puede cavar a razón de $0{,}3\ m/h$, ¿cuántas horas tardarán en llegar al niño?

15. Los ángulos de elevación de un globo desde dos puntos A y B al nivel del suelo son $24°\ 10'$ y $47°\ 40'$, respectivamente. Los puntos A y B están a $84\ m$ entre sí y el globo está entre los puntos en el mismo plano vertical. Calcular a qué altura se encuentra el globo.

16. Probar las siguientes identidades trigonométricas, justificando el procedimiento realizado.

(a) $\cot\alpha \cdot \sec\alpha = \csc\alpha$ (b) $\cos\alpha \cdot \csc\alpha = \cot\alpha$

(c) $\cos\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \cot\alpha}{\tan\alpha + \csc\alpha}$ (d) $\csc\alpha = \dfrac{\sec\alpha}{\tan\alpha}$

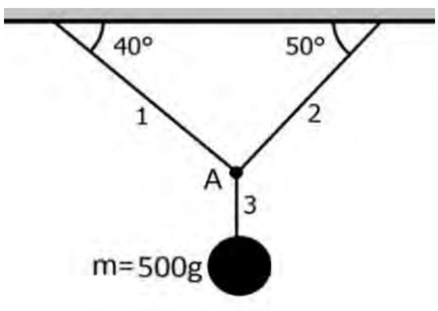
(e) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\csc\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sec\alpha} = 1$ (f) $\cos^2\alpha = \operatorname{sen}\alpha \cdot (\csc\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$

17. Simplificar las siguientes expresiones.

(a) $\dfrac{\cos\alpha \cdot \csc\alpha}{\tan\alpha}$ (b) $\dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$

(c) $\dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{1 - \cos^2\alpha} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{\cos\alpha}$ (d) $\dfrac{\tan^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\tan^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\alpha}$

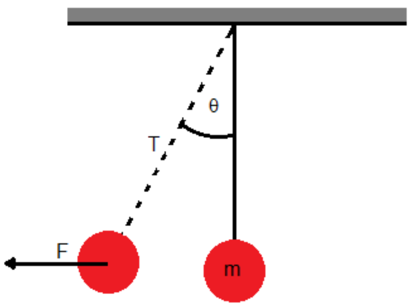
18. Una pelota de $500\ g$ de masa es sostenida del techo como se observa en la siguiente figura. Calcular las tensiones para cada una de las cuerdas.



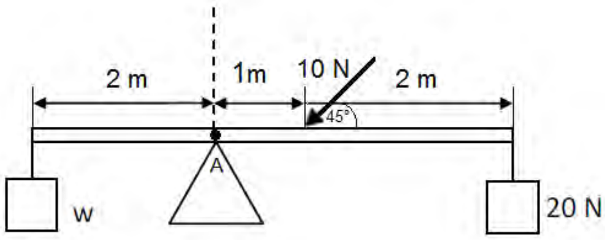
Sugerencia: Realizar primero un diagrama de cuerpo libre sobre la pelota y luego otro DCL sobre el punto A.

19. Para la siguiente figura, indicar el valor de la norma del momento de la fuerza peso, que la pesa de $5\ kg$ masa ejerce sobre el punto E en el brazo del deportista.

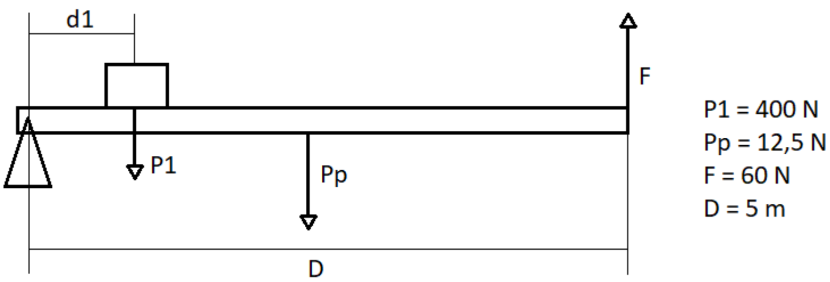
20. ¿Cuál será la fuerza necesaria para apartar un objeto de masa 2 kg de la vertical un ángulo de 25°? ¿Cuál será el nuevo valor de la tensión en la cuerda en esas nuevas condiciones de equilibrio estático?



21. ¿Cuál deberá ser la magnitud del peso w para que la barra no gire en torno al apoyo A?



22. La palanca de la figura tiene un peso P_p que lo consideramos concentrado en la mitad de la longitud D. Se coloca un cuerpo de peso P_1 sobre la palanca como se observa en la figura, y para mantener el equilibrio se debe realizar la fuerza F en el extremo de la palanca.



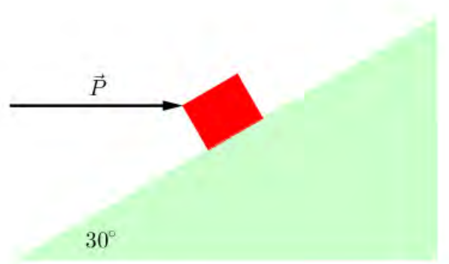
(a) Calcular la distancia d_1 para que la palanca permanezca en equilibrio.
(b) Calcular la reacción en el punto de apoyo.
(c) Para la fuerza P_p indicar el intervalo de incertidumbre del momento de dicha fuerza con respecto al apoyo de la palanca, si la longitud D tiene una incertidumbre de $0{,}01\,m$ y el intervalo de incertidumbre de la fuerza es:

$$\left\|\vec{P}_p\right\| = (12{,}5 \pm 0{,}1)N$$

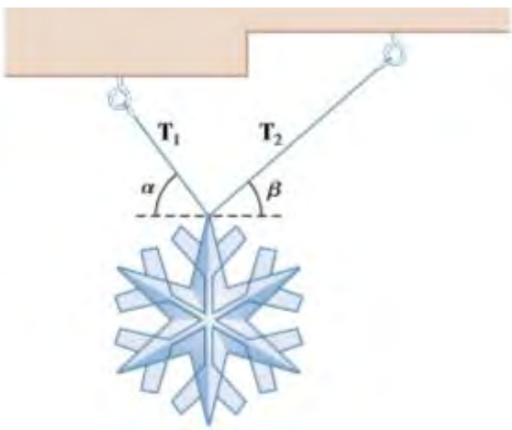
23. Calcular la fuerza necesaria para arrastrar un mueble que pesa 500 kg por una tabla de 3 *metros* de largo en un plano inclinado de 2 *metros* de altura. ¿Qué ángulo forma la tabla con el piso?

24. Un auto está estacionado sobre una calle con una pendiente de 20°. Si su peso es de 10500 N, determinar el valor de la fuerza que ejerce el piso sobre el auto.

25. El bloque de la figura pesa $20\,N$. ¿Qué fuerza $\vec{P}$, horizontal al piso, lo empujara hacia arriba sobre el plano inclinado.



26. Un adorno de 5 N cuelga de dos alambres como muestra la figura. Calcular las tensiones de los cables sabiendo que $\alpha = 45°$ y $\beta = 30°$.



Soraya Buccino nació en la Provincia de Buenos Aires donde vive actualmente. Es Profesora de Matemática y obtuvo su Licenciatura en Enseñanza de la Matemática en 2011 en la UTN FRGP. Es docente en diversas materias del área de Matemática: Álgebra y Geometría Analítica, Estructuras algebraicas y sus aplicaciones, Probabilidad y Estadística I y II en la UNM y la UTN. Ha participado en congresos y proyectos de investigación relacionados con la Enseñanza de la Matemática, a través de software de Geometría dinámica. Actualmente trabaja como coordinadora técnica del programa NEXOS de la UTN FRGP. Es autora del libro "Elementos de Probabilidad y Estadística", editorial UNM.

María Silvana Ramirez Daneri nació en CABA y vive actualmente en General Pacheco, hogar de la UTN FRGP, donde obtuvo su título de Ingeniera Mecánica en 2015. Es docente en diversas materias del área de Ciencias Básicas: Álgebra y Geometría Analítica, Análisis Matemático y Física en UTN y UBA. Ha participado en congresos y proyectos de investigación relacionados con la Enseñanza de la Matemática y la Ciencia y Tecnología de los Materiales. Participa del programa NEXOS de la UTN FRGP. Cursó estudios de posgrado en la Maestría en Ciencia y Tecnología de Los Materiales en el Instituto Sábato (CNEA – UNSAM) y en Maestría en Docencia Universitaria en UTN FRGP.

Mario Alejandro Di Blasi Regner realizó estudios de grado y posgrado en el INSPT y en la UNSAM dónde obtuvo el título de Especialista en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y Matemática. Actualmente se encuentra finalizando su Doctorado en Enseñanza de las Ciencias (mención Matemática) en la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN. Es director del Departamento de Materias Básicas y de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática en la UTN FRGP. Dirige proyectos de investigación relacionados con la Enseñanza de la Matemática y es el coordinador académico del Proyecto NEXOS en la FRGP. Ha participado en encuentros científicos internacionales como expositor y publicado sus trabajos en revistas especializadas a nivel nacional e internacional.

Celia Fasce nació en CABA donde vive actualmente. Es Profesora de Matemática y obtuvo su Licenciatura en Enseñanza de las Ciencias, con orientación en Didáctica de la Matemática en 2012 en UNSAM. Es profesora en UBA, UTN, INSPT-UTN y el ISPJVG en diversas materias: Álgebra y Geometría Analítica, Análisis Matemático I y II, Complementos de Trigonometría y Geometría Analítica, Matemática Aplicada y varios Seminarios. Ha participado en proyectos de investigación relacionados con la Enseñanza de la Matemática a través de software de Geometría dinámica. Es autora del libro "Introducción al Cálculo con Aplicaciones Económicas" y de diversos cursos de capacitación docente.

Pablo Viveros nació en la CABA y vive actualmente en la provincia de Buenos Aires. Es Profesor de Matemática y obtuvo su Licenciatura en Enseñanza de la Matemática en 2013 en la UTN FRGP. Es docente universitario en diversas materias del área de Matemática: Álgebra y Geometría Analítica, Probabilidad y Estadística I y II en la UTN. A nivel de la educación terciaria, es profesor en asignaturas que relacionan la Matemática con áreas de la Física y la Química. Ha participado en congresos internacionales y proyectos de investigación vinculados con la Enseñanza de la Matemática, a través de software de Geometría dinámica.

Esta obra es el resultado del trabajo realizado por docentes de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco y reúne los conocimientos básicos, en el área de Matemática, considerados imprescindibles para el acceso a la Universidad.

Al escribir cada capítulo se ha procurado utilizar un “lenguaje natural” e introducir a los alumnos gradualmente en el lenguaje propio de la Matemática, llevándolos a la formalización que esta materia exige en su aspecto conceptual.

Considerando que la aplicación de la Matemática, puede aportar grandes beneficios en su enseñanza y aprendizaje, se tratan los conceptos matemáticos integrados y aplicados a la Física y al entorno cotidiano de los alumnos.

ISBN 978-987-42-8904-9
9 789874 289049